

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа выполняется студентами заочной формы обучения.

**Требования к выполнению контрольной работы:**

Работа делается в тетради на 18 листов или на 10-15 листах формата А-4.

#### «Математическая логика», «Комплексные числа», «Матрицы»

##### Вариант I

1. Запишите формулу для афоризма Конфуция «Благородный человек предъявляет требования к себе, низкий человек предъявляет требования к другим».
2. Составьте таблицу истинности для формулы  $F = A \vee B \rightarrow \bar{B} \vee C$
3. Установить равносильность суждений: «Если взялся за дело, то доведи его до конца» и «Не берись за дело или доведи его до конца».

4. Найдите сумму и разность комплексных чисел  $z_1 = 2 - i$ ,  $z_2 = -3 + 4i$ .

5. Найдите произведение и частное комплексных чисел  $z_1 = 4+4i$ ,  $z_2 = -2 - i$ .

6. Запишите заданное комплексное число в тригонометрической и показательной формах  $z = -\sqrt{3} - i$

7. Найдите  $z^{30}$ , если  $z = -\sqrt{3} + i$ .

8. Найти матрицу  $C = A - 3B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. Вычислить  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. Найти транспонированную матрицу  $A^T$  для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

Вычислить  $A \cdot A^T$  и  $A^T \cdot A$ .

11. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

##### Вариант II

1. Запишите формулу для афоризма Лихтенберга «Кто не понимает ничего, кроме химии, тот и ее понимает недостаточно»
2. Составьте таблицу истинности для формулы  $F = A \rightarrow \bar{B} \vee (\bar{A} \vee C)$
3. Установить равносильность суждений: «Платон мне друг, но истина дороже» и «Неверно, что Платон мне не друг и что мне не дорога истина».
4. Найдите сумму и разность комплексных чисел  $z_1 = 3 - i$ ,  $z_2 = -2 + 5i$ .
5. Найдите произведение и частное комплексных чисел  $z_1 = 2 + 2i$ ,  $z_2 = -3 - 4i$ .
6. Запишите заданное комплексное число в тригонометрической и показательной формах  $z = -\sqrt{3} + i$

7. Найдите  $z^{30}$ , если  $z = -4 + 4i$ .

8. Найти  $C = 2 \cdot H - A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ .

9. Найти  $M \cdot N$  и  $N \cdot M$  на матрицу  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$   $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ .

10. Найти транспонированную матрицу  $A^T$  для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Вычислить  $A \cdot A^T$  и  $A^T \cdot A$ .

11. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

**Контрольная работа № 2 по теме  
«Системы линейных алгебраических уравнений», «Векторы», «Аналитическая  
геометрия»**

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

2. В пространстве заданы точки  $A(2; -4; 1)$  и  $B(-2; 0; 3)$ . Найти модуль вектора  $\overline{AB}$ .
3. Какие из векторов  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(4; 8; 12)$ ,  $\vec{c}(5; 10; 12)$  коллинеарны?
4. Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если координаты трех других вершин известны:  $A(2; 3; 2)$ ,  $B(0; 2; 4)$ ,  $C(4; 1; 0)$ .
5. Написать разложение вектора  $\vec{x}(3, 1, 3)$  по векторам  $\vec{p}(2, 1, 0)$ ,  $\vec{q}(1, 0, 1)$  и  $\vec{r}(4, 2, 1)$ .
6. Найти угол между векторами  $\vec{a}(3; 4; 0)$  и  $\vec{b}(4; 4; 2)$ .
7. Найти векторное произведение векторов  $\vec{a}(1; 2; 3)$  и  $\vec{b}(2; 1; -2)$ .
8. Найти объем пирамиды построенной на векторах  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(1; -1; 1)$  и  $\vec{c}(2; 0; -1)$ .
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата  $x + 3y - 7 = 0$  и точка пересечения его диагоналей  $P(0; -1)$ . Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы  $y^2 = x + 4$  с осями координат.
11. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса  $x^2 + 5y^2 = 20$ , а две другие совпадают с концами его малой оси.
12. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот  $y = \pm \frac{3}{4}x$  и расстояние между фокусами равно 20.
13. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки  $A(2; 2)$  и от оси абсцисс. Построить линию.
14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(-1; 1; 2)$  параллельно плоскости  $xOy$ .

**Вариант II**

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

2. Найти длину вектора  $\overline{AB}$ , если  $A(1; 4; 5)$ ,  $B(3; 1; 1)$ .
3. При каком значении  $n$  вектора  $\vec{a}(3; 2; 4)$  и  $\vec{b}(9; n; 12)$  коллинеарны?
4. Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если координаты трех других вершин известны:  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; 1; -1)$ ,  $C(-1; 0; 1)$ .

5. Написать разложение вектора  $\vec{x} = (-13, 2, 18)$  по векторам  $\vec{p} = (1, 1, 4)$ ,  $\vec{q} = (-3, 0, 2)$ ,  $\vec{r} = (1, 2, -1)$
6. Найти угол между векторами  $\vec{a} (1; 0; 3)$  и  $\vec{b} (5; 5; 0)$ .
7. Найти векторное произведение векторов  $\vec{a} (-1; 2; -2)$  и  $\vec{b} (2; 1; -1)$ .
8. Найти объем пирамиды построенной на векторах  $\vec{a} (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} (1; 1; 1)$  и  $\vec{c} (1; 2; 1)$ .
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата  $x + 3y - 7 = 0$  и точка пересечения его диагоналей  $P (0; -1)$ . Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы  $y^2 = x + 4$  с осями координат.
11. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса  $x^2 + 5y^2 = 20$ , а две другие совпадают с концами его малой оси.
12. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот  $y = \pm \frac{3}{4}x$  и расстояние между фокусами равно 20.
13. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки  $A (2; 2)$  и от оси абсцисс. Построить линию.
14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A (-1; 1; 2)$  параллельно плоскости  $xOy$ .

**Контрольная работа № 3 по теме  
«Функции», «Производные», «Дифференциалы»**

**Вариант I**

1. Найти области определения следующих функций:

а)  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ ; б)  $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$ ;

2. Представить сложные функции в виде композиции основных элементарных функций:

а)  $y = 2^{\sin \sqrt[3]{x}}$ ; б)  $y = \sqrt[3]{\lg \sin x^3}$ ;

3. Построить графики функций:

а)  $y = (2x + 3)/(x^2 - 1)$ ;

в)  $y = -2 \sin(2x + 2)$ ;

4. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 1 + x, & \text{если } x < 0, \\ 2 \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi, \\ x - \pi, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

5. Для функции найти обратную, построить графики данной и найденной функций

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

6. Найти производные функций

1. 1. Найти производные следующих функций:

а)  $y = 3x^3 + 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3$ ;

б)  $y = x^3 \sin x \cdot \ln x$ ;

в)  $y = \sqrt{(x^3 + 1)/(x^3 - 1)}$ .

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой  $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$  в точке  $x_0 = 1$ . (Ответ:  $2x + y - 2 = 0$ ;  $x - 2y - 1 = 0$ .)

2. 1. Воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)), найти производную функции  $y = (3x - 1)/(2x + 5)$ . (Ответ:  $y' = 17/(2x + 5)^2$ .)

2. Найти производные следующих функций:

а)  $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6$ ;

б)  $y = (x^3 + 1) \cos 5x$ ;

в)  $y = ((x^4 + 1)/(x^4 - 1))^3$ .

3. 1. Найти производные следующих функций:

а)  $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2$ ;

б)  $y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x}$ ;

в)  $y = (\sin^2 x)/(x^3 + 1)$ .

2. Расстояние, пройденное материальной точкой за время  $t$  с,  $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$  ( $s$  — в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени  $t = 0$ ; 1; 2 с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

7. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции  $y = x^3 \cdot \ln x$ .

8. Найти приближенное значение  $\sqrt[4]{17}$  с точностью до двух знаков после запятой.

9. Найти пределы, используя правило Лопиталья

1.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$ .

1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$ .

1.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ .

1.4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$ .

10. Вычислить значения частных производных функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xyz \text{ в точке } M(2; -2; 1).$$

Вычислить  $u'_x + u'_y + u'_z$  в точке  $M_0(1, 1, 1)$ , если  $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$ . (Ответ: 3/2.)

Вычислить значения частных производных функции  $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M_0(3, 4)$ . (Ответ: 2/5, 1/5.)

### Вариант II

1. Найти области определения следующих функций:

а.  $y = \sqrt{25 - x^2} + \operatorname{lg} \sin x$ .

б.  $y = 1/\sqrt{x^2 + x}$ .

2. Представить сложные функции в виде композиции основных элементарных функций:

а.  $y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{\operatorname{lg} x}$ ;

б.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{2x^4}$ .

3. Построить графики функций:

a.  $y = |3x + 4 - x^2|;$

b.  $y = x \sin x.$

4. Построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 0 \\ 1 + 2x, & \text{если } 0 < x < 2 \\ x - 2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Для функции найти обратную, построить графики данной и найденной функций

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$$

6. Задания по теме «Производные сложных функций»

1. 1. Найти производные следующих функций:

a)  $y = 3x^3 + 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3;$

б)  $y = x^3 \sin x \cdot \ln x;$

в)  $y = \sqrt{(x^3 + 1)/(x^3 - 1)}.$

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой  $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$  в точке  $x_0 = 1$ . (Ответ:  $2x + y - 2 = 0;$   $x - 2y - 1 = 0.$ )

2. 1. Воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)), найти производную функции  $y = (3x - 1)/(2x + 5)$ . (Ответ:  $y' = 17/(2x + 5)^2.$ )

2. Найти производные следующих функций:

a)  $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6;$

б)  $y = (x^9 + 1) \cos 5x;$

в)  $y = ((x^4 + 1)/(x^4 - 1))^3.$

3. 1. Найти производные следующих функций:

a)  $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2;$

б)  $y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x};$

в)  $y = (\sin^2 x)/(x^3 + 1).$

2. Расстояние, пройденное материальной точкой за время  $t$  с,  $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$  ( $s$  — в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени  $t = 0; 1; 2$  с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

Вычислить  $u'_x + u'_y + u'_z$  в точке  $M_0(1, 1, 1)$ , если  $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$ . (Ответ: 3/2.)

Вычислить значения частных производных функции  $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M_0(3, 4)$ . (Ответ: 2/5, 1/5.)

7. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции  $y = x^3 \cdot \ln x$ .

8. Найти приближенное значение  $\sqrt[4]{17}$  с точностью до двух знаков после запятой.

9. Найти пределы, используя правило Лопиталья

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$$

10. Вычислить значения частных производных функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xyz \text{ в точке } M(2; -2; 1).$$

Вычислить  $u'_x + u'_y + u'_z$  в точке  $M_0(1, 1, 1)$ , если  $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$ . (Ответ: 3/2.)

Вычислить значения частных производных функции  $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M_0(3, 4)$ . (Ответ: 2/5, 1/5.)

**Контрольная работа № 4 по теме  
«Интегралы», «Ряды», «Дифференциальные уравнения»**

1. Взять неопределенные интегралы:

а)  $\int \frac{(x^2 - 6x + 8)dx}{x^3 + 8}$

б)  $\int \frac{(x^2 + 23)dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)}$

2. Проинтегрировать по частям:

а)  $\int (x - 6) \sin \frac{x}{2} dx$ ;

б)  $\int x^2 \cos x dx$ ;

в)  $\int x \cos 5x dx$ ;

г)  $\int (x + 1)e^{2x} dx$ .

3. Вычислить определённые интегралы

а)  $\int_{-x}^0 \cos nx dx$  б)  $\int_{-x}^x \sin nx dx$  в)  $\int_0^3 \sin \frac{\pi x}{3} dx$  г)  $\int_{-2}^2 \cos \frac{\pi x}{2} dx$

д)  $\int_{-x}^0 \sin nx dx$  е)  $\int_{-x}^x \cos nx dx$  ж)  $\int_0^3 \cos \frac{\pi x}{3} dx$  з)  $\int_{-2}^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx$

**Ряды**

4. Найти  $u_{n+1}$  и  $u_{2n-1}$  члены ряда:

а)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{14} + \dots$ ; б)  $\frac{3}{4 \cdot 2!} + \frac{9}{8 \cdot 3!} + \frac{81}{16 \cdot 4!} + \dots$ ; в)  $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$$

6. Разложить функцию в ряд Маклорена:

$$f(x) = x \cdot \cos 3x$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом  $T = 2\pi$ ) функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Постройте график данной функции при  $x \in [-4\pi; 4\pi]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 4x - 3, & 0 \leq x < \pi; \end{cases}$$

8. Определить порядок дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

9. Установить, является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

$$y = Ce^x \sin x;$$

$$y''' - 2y' + 2y = 0.$$

10. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, найти указанные частные решения и построить их:

$$y' = 3x^2; \quad y(0) = 2.$$