ЛЕКЦИЯ 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Оглавление

1.1. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера m×n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Каждую такую таблицу заключают в круглые скобки, квадратные скобки или двойные вертикальные черточки и обозначают какой-либо большой буквой. Например:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

В общем случае матрица обозначается

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

или в сокращенной записи A=(a_{ij}); i =1, 2, …, m; j =1, 2,…, n.

Числа, составляющие матрицы, мы будем называть *элементами* матрицы. Для обозначения каждого из элементов матрицы используется двойной индекс. По условию первый индекс обозначает номер строки, а второй - номер столбца в котором стоит данный элемент. Таким образом, a_{25} обозначает элемент, стоящий во второй строке и пятом столбце; a_{ij} обозначает элемент, стоящий в i-й стоке и j-ом столбце. Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной,* а число строк – её *порядком.* Остальные матрицы называются *прямоугольными матрицами размера m×n.*

Две матрицы, имеющие одинаковое число строк m и столбцов n, называются *матрицами одинаковой размерности*. Две матрицы одинаковой размерности называются *равными*, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах. Иначе говоря, A=B, если $a_{ij}=b_{ij}$ при всех i, j.

Рассмотрим частные виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно *вектор-строкой* или *вектор-столбцом*.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Любое число можно рассматривать как матрицу размера 1×1,имеющую одну строку и один столбец, т. е. A=(a_{11}).

Матрица размера m×n, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей и обозначается 0. Нулевые матрицы различных размерностей различны.

Совокупность элементов квадратной матрицы, расположенных на отрезке, соединяющим левый верхний угол с правым нижним, называют *главной* *диагональю,* а на отрезке, соединяющим правый верхний угол с левым нижним, – *побочной диагональю* матрицы.

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются диагональными матрицами и записываются

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ .... & ..... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & .... & .... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой, равны 1, называется *единичной матрицей* и обозначается буквой Е.

Квадратная матрица называется *треугольной,* если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. При этом матрица B называется

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ .... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & ... & 0 \\ c_{21} & c_{22} & ... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

правой или верхней треугольной, а матрица С – *левой* или *нижней треугольной матрицей*.

Транспонированием матрицы называется перемена ролями строк и столбцов с сохранением их нумерации и обозначается A^T или A^*. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейные операции над матрицами.

Пусть даны матрица А и число λ. *Произведением матрицы А на число λ* называется матрица λА, элементы которой получаются из элементов матрицы А умножением на число λ:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Матрица (-1)А называется *противоположной матрице А.*

Пусть даны две матрицы одинаковой размерности

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Суммой двух матриц А и В одинаковой размерности называется матрица C той же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц А и В, т. е.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ .... & .... & ..... & .... \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & ..... & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Аналогично определяется *разность* матриц

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & ... & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & ... & a_{2n}-b_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & .... & a_{nn}-b_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

Пример 1. Даны матрицы А и В. Найти матрицы А+В, 3А-4В.

Решение. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Тогда $A+B=\begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 & 3+1 \\ 4-7 & -5+3 & 2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix},$

$$3A-4B=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 12 & -15 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -28 & 12 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-12 & 6-16 & 9-4 \\ 12-(-28) & -15-12 & 6-16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & -10 & 5 \\ 40 & -27 & -10 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число, называемые линейными операциями над матрицами, обладают следующими свойствами:

1) А+В=В+А; *2)* А+(В+С)=(А+В)+С;

3) А+0=А; *4)* А+(-А)=0;

5) 1·А=А; *6)* (α +β)А=α А+βА;

7) α (А+В)=α А+α В; *8)* α (βА)=(α β)А.

Здесь А, В, и С – матрицы, β и α – числа, 0 – нулевая матрица.

Произведение матрицы А на матрицу В определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, например, $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ заданных в определенном порядке (А – первая, В – вторая), называется матрица, $C_{m\times p}$ каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В. Это можно проиллюстрировать схемой

$$\begin{pmatrix} c_{11} & ... & ... & c_{1p} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{i1} & ... & \boxed{c_{ij}} & c_{ip} \\ c_{m1} & ... & ... & c_{mp} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1l} \\ ... & .... & ... \\ \hline a_{i1} & .... & a_{in} \\ \hline ..... & .... & ..... \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{ij} & ... & b_{1p} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ ..... & ..... & .... & .... & .... \\ b_{n1} & .... & b_{nj} & .... & b_{np} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

т.е.

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ .... \\ b_{nj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$$

где i =1,2, …m, j =1,2,…, p.

Произведение матриц А и В взятых в указанном порядке обозначается АВ.

Пример2. Вычислить произведение матриц АВ если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение. Из определения произведения двух матриц следует, что число строк матрицы произведения равно числу строк первой матрицы, а число столбцов – числу столбцов второй матрицы. В нашем случае матрица АВ будет иметь размерность (2×3) и

$$C=AB=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\ 7 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

Здесь, например,

$$c_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=2\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot 1=7,$$

$$c_{13}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=(-1)\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot(-2)=-5.$$

Из определения умножения матриц видно, что если возможно умножение матрицы А на матрицу В, то отсюда, вообще говоря, не следует возможность умножения матрицы В на матрицу А. Легко видеть, что в рассмотренном примере2 нельзя образовать произведение АВ, так как число столбцов матрицы В равно 3, а число строк матрицы А равно 2. Даже если произведения АВ и ВА возможны, то АВ в общем случае не совпадает с ВА.

Пример3. Найти произведения АВ и ВА, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 10 & -6\end{pmatrix} \qquad \text{и}$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 11 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, умножение матриц, вообще говоря, не обладает свойствами коммутативности, т. е.

АВ ≠ВА.

Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы А называют произведение m матриц

$$A^m=\underbrace{A\cdot A....A}_{m\ \text{раз}}. \tag{1.6}$$

Если матрица А – любая квадратная матрица порядка n, а Е – единичная матрица того же порядка, то, очевидно, имеют место равенства

AE=EA=A,

т.е. единичная матрица в операции умножения играет такую же роль, как и число 1 при умножении чисел.

Можно проверить, что произведение матриц обладает следующими свойствами:

1) A(BC)=(AB)C; *2)* λ(AB)=(λA)B;
3) C(A+B)=CA+CB; *4)* (A+B)C=AC+BC;

где A, B, C – матрицы, λ – число. При этом предполагается, что все написанные произведения имеют смысл.

Отметим, что операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1) $\left(A^T\right)^T = A$; *2)* $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$;
3) $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$; *4)* $\left(AB\right)^T = B^T \cdot A^T$.

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения многих экономических и управленческих задач. Впервые понятие матрицы было введено для упрощения записи системы линейных алгебраических уравнений математиком Кэли в 1850 году. Например, линейная алгебраическая система

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ после введения обозначений $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

записывается в матричной форме AX=B и имеет простое решение.

1.2. Определители и их свойства

Подчеркнем еще раз, что любая матрица A – это всего лишь таблица чисел, не имеющая числовой характеристики. Это просто удобный способ обозначения таблиц с числами. Для ответа на вопрос о решении уравнения AX=B или для нахождения систем линейных алгебраических уравнений необходимо введение *определителя*- числа, характеризующего квадратную матрицу A порядка n. Определитель матрицы A обозначается одним из символов

$|A| = \Delta = \det \mathrm{A}$.

Определителем матрицы первого порядка A=(a_{11}), или определителем первого порядка, ***называется элемент a_{11}***

$\Delta_1 = |A| = a_{11}$. Например, пусть A=(-4), тогда $\Delta_1 = |A| = -4$

Определителем матрицы второго порядка $A=\left(a_{ij}\right)$, или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - \cancel{a_{12}}a_{21}. \qquad (1.7)$$

Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, расположенных на *главной* и *побочной* диагоналях матрицы A. Схематически формула (1.7) изображается так

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)-(-3)\cdot 5 = -8+15 = 7\,.$$

Определителем матрицы третьего порядка, или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - \tag{1.8}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для вычисления определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом Саррюса (правилом треугольников), которое символически иллюстрируется следующей схемой:

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix}.$$

Можно использовать и другой алгоритм для вычисления определителя 3-го порядка:

Записываем определитель 3-го порядка и после третьего столбца дописываем 1-й и 2-й столбцы этого определителя;

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right.$$

Умножаем тройку чисел, расположенных на главной диагонали и ей паралельных диагоналях и полученные произведения записываем с тем же знаком;

Умножаем тройку чисел, расположенных на побочной диагонали и ей паралельных диагоналях и полученные произведения записываем с противоположным знаком;

Все записанные числа складываем.

Пример 4. Вычислить определитель, используя обе схемы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 4 - (-1)\cdot 2\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 1 =$$

$$= 4 - 9 + 8 + 8 - 12 - 3 = -4.$$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right. = 4 + 8 - 9 + 8 - 3 - 12 = -4.$$

Аналогично вводится понятие определителя, соответствующего матрице 4-го, 5-го и вообще n-го порядков. *Определителем n-го порядка*, соответствующим квадратной матрице порядка n, называется число, которое по определенному закону ставится в соответствие этой матрице. Правила для вычисления определителей более высоких порядков мы рассмотрим после изучения свойств определителей.

Определители любых порядков обладают одинаковыми свойствами, которые мы рассмотрим на примере определителей 3-го порядка.

Определитель не меняется при транспонировании, т.е.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для доказательства достаточно вычислить определители в левой и правой части последнего равенств, например, по правилу Саррюса.

Перестановка двух столбцов (или строк) определителя равносильна умножению его на минус единицу т.е.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

Доказательство такое же, как и в случае свойства 1.

Если определитель имеет два одинаковых столбца (или строки), то он равен нулю, т.е. если в определителе, например, совпадает первый и третий столбец, то
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Переставим в определителе Δ первый и третий столбцы. Так как они совпадают, то значение определителя при этом не изменится и равно Δ. Но с другой стороны, используя свойство 2, получим $\Delta=-\Delta$. Из этого следует, что $2\Delta=0$ и $\Delta=0$, что и требовалось доказать.

Умножение всех элементов некоторого столбца(или строки)определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это k, т.е. если, например, первый столбец определителя умножим на k, то
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство такое же как и в случае свойства 1.

Если некоторый столбец (или строка) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Это частный случай свойства 4 при k=0.

Если соответствующие элементы двух столбцов(или строк) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

Доказательство очевидно следует из свойств 3 и 4.

Если каждый элемент некоторого столбца определителя представляет собой сумму 2-х слагаемых, то имеет место равенство
$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства утверждения достаточно вычислить определители, стоящие в левой и правой части последнего равенства.

Определитель не изменяется, если к элементам некоторого столбца(или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на любое число k, например, если к элементам первого столбца прибавить соответствующие элементы второго столбца, умноженные на k, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство, очевидно, следует из свойств 7, 4 и 2.

Введем новые понятия, необходимые в дальнейшем.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-строки и j-го столбца, содержащих элемент a_{ij}. Например, минором элемента a_{21} определителя 3-го порядка будет

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}.$$

Каждый определитель n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (1.9)$$

т.е. алгебрагичиское дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ – четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ – нечетное число.

Пример5. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{23} и a_{32} определителя $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. По определению минора элемента a_{ij}, получаем

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

По определению алгебрагического дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 13, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -8.$$

(Теорема Лапласа) Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любого столбца (или строки) на их алгебраические дополнения. В частности, для определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Для доказательства записанного равенства достаточно вычислить определитель, стоящий в левой части и подставить в правую часть значения алгебраических дополнений.

Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любого столбца (или строки) равна определителю, полученному из исходного заменой элементов этого столбца (или строки) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Например, для определителя 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ и произвольных b_1, b_2, b_3 имеет место равенство

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.10)$$

Для доказательства достаточно расписать определитель, стоящий в правой части последнего равенства по элементам первого столбца.

Следствие. *Сумма произведений элементов любого столбца (или строки) на алгебраические дополнения к элементам другого столбца (или строки) равна нулю.*

Это следует из свойства 10. В частности, для определителя 3-го порядка: если в равенстве (1. 10) заменить b_1, b_2, b_3 на соответствующие элементы второго или третьего столбца, то определитель, стоящий в правой части равенства будет равен нулю по свойству 3.

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

Для доказательства этого равенства для определителей 3-го порядка

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

достаточно перемножить матрицы, стоящие в левой части и вычислить их определитель и вычислить и перемножить определители, стоящие в правой части.

1.3. Вычисление определителей

Использование теоремы Лапласа с предварительным обращением в ноль всех, кроме, одного, элементов столбца или строки.

Пример6. Вычислить определитель, используя теорему Лапласа.

1)Разложим по первому столбцу:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 13+2\cdot 0+4(-13)=-26.$$

2) Разложим по второй строке:

$$\Delta=(-1)^{2+1}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+(-1\ )^{2+2}4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot 0+4(-6)-1\cdot 2=-26.$$

Из приведенного примера можно сделать вывод, что применение теоремы Лапласа особенно удобно тогда, когда столбец или строка по которой ведется разложение имеет много нулей. Умножая элементы столбцов (или строк) определителя на определенным образом выбранные коэффициенты, а затем складывая столбцы (или строки), можно достичь того, что все элементы некоторого столбца(или строки), за исключением одного, обратятся в нуль. Тогда исходный определитель будет равен произведению $(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$, где M_{ij} – минор, соответствующий не нулевому элементу a_{ij}, стоящему в i-й строке и j-м столбце определителя.

Пример7. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

Решение. Считая первую строку разрешающей, обнулим элементы первого столбца, стоящего под первой строкой. Прибавив к третьей строке первую, умноженную на 2 и k четвертой первую, умноженную на (-3) получаем.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по элементам первого столбца

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель со второго столбца за знак определителя и обнулим элементы первой строки, прибавив к первому столбцу элементы второго столбца, умноженные на (-3) и к третьему столбцу – второй

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первой строке, получим

$$\Delta = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -2(28-32) = 8.$$

Ответ: Δ=8.

Метод приведения к треугольному виду. Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равные нулю. Получаемый в результате треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Обнуление строки или столбца выполняется так же, как в предыдущем методе. Вычислим определитель примера 7 методом приведения к треугольному виду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-4) = 8$$

В последнем преобразовании к элементам третьего столбца прибавили соответствующие элементы второго столбца.

Упражнения.

1.Выполнить действия над матрицами

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 0 & 4\\ 7 & 2 & 5 & 5 & 2\\ 3 & 4 & 1 & -7 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$$ Найти A·B.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}.$$ Найти A·B.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$ Найти A^3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$ Вычислить A·B-B·A.

2. Вычислить определители:

2.1. $\begin{vmatrix}1 & 17 & -7\\ -1 & 13 & 1\\ 1 & 7 & 1\end{vmatrix}$, 2.2. $\begin{vmatrix}7 & -2 & 4\\ -2 & 1 & -3\\ -3 & -4 & -2\end{vmatrix}$,

2.3. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 5 & -9\\ 5 & 7 & -1\end{vmatrix}$, 2.4. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 3 & 16\\ 0 & -1 & 10\end{vmatrix}$,

2.5. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$, 2.6. $\begin{vmatrix}-3 & 2 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 4 & 3\\ -3 & 8 & 7 & 6\\ 1 & 0 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

4. Найти M_{11}, M_{23}, A_{13}, A_{21}, A_{12}, A_{23}, A_{31}, A_{32} определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -7 & 3\\ 4 & 0 & -8\\ -1 & 5 & 6\end{vmatrix}.$$

Лекция 2. РАНГ МАТРИЦЫ, ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Оглавление

2.1. Ранг матрицы

Пусть дана матрица А размера m x n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если в этой матрице вычеркнуть произвольно k столбцов и k строк, то элементы, стоящие на пересечении выделенных столбцов и строк, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка матрицы А*. Очевидно, что матрица А обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Среди всех отличных от нуля миноров матрицы A найдется, по крайней мере, один минор, порядок которого будет наибольшим.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

Если все элементы матрицы A равны нулю, то говорят, что ранг матрицы A равен нулю. Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется, по крайней мере, один, отличный от нуля минор порядка r, но все миноры порядка, большего чем r, равны нулю. Ранг матрицы A обозначается через $r(A)$ или $rang\ A$.

Очевидно, что всегда справедливо неравенство

$$0 \le r(A) \le min(m,n).$$

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Единственный минор четвертого порядка очевидно равен нулю. Среди миноров третьего порядка имеется минор

$$M=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

отличный от нуля (он расположен в левом верхнем углу матрицы А). Значит, ранг данной матрицы равен 3.

Из свойств определителей очевидно следует следующие свойства ранга матрицы.

1. *При транспонировании ранг матрицы не меняется.*
2. *Ранг матрицы не меняется при перестановке ее столбцов (или строк).*

3. *Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число.*
4. *Ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов (или строк) прибавить другой столбец (или строку), умноженные на некоторое число.*
5. *Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец (или строку), состоящую из одних нулей.*
6. *Ранг матрицы не изменяется, если удалить из нее столбец (или строку), являющуюся линейной комбинацией других столбцов (или строк).*

Элементарными называются следующие преобразования матриц:

1) перестановка двух любых столбцов (или строк);
2) умножение столбца (или строки) на отличное от нуля число;
3) прибавление к одному столбцу (или строке) линейной комбинации других столбцов (или строк).

Из рассмотренных свойств ранга матрицы 2-4 следует , что при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Две матрицы называется *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью применения конечного числа элементарных преобразований. Эквивалентные матрицы не являются равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это обозначается так: $A \sim B$.

Практически при вычислении ранга матрицы, используя эквивалентные преобразования, ее приводят к ступенчатому виду из которого очевиден наибольший отличный от нуля минор этой матрицы.

Пример 2. Используя эквивалентные преобразования, вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Переставим вторую и первую строки и обнулим, используя первую строку, элементы первого столбца

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} (-3), (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы А равен двум, так как минор второго порядка

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$ Ответ: r(A)=2.

2.2 Обратная матрица

Для любого действительного числа $a \neq 0$ существует число a^{-1} (называемое обратным для a), такое, что $a^{-1}a=a\,a^{-1}=1$. Рассмотрим вопрос: для всякой ли матрицы А существует матрица A^{-1}, такая, что

$$A\,A^{-1}= A^{-1}A=E?$$

Если такая матрица существует, то ее называют обратной по отношению к матрице A и обозначают символом A^{-1} (отмечаем, что $A^{-1}\neq 1/A$ или $A^{-1}\neq E/A$ и у нас нет операции деления матриц). Очевидно, что матрица А может иметь обратную только в том случае, если она является квадратной, так как произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$ могут существовать одновременно, лишь когда матрица А является квадратной.

Квадратная матрица A называется *невырожденной* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля и *вырожденной* или *особенной*, если ее определитель равен нулю.

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A того же порядка, если при умножении этой матрицы на данную и справа и слева в результате получаем единичную матрицу E.

$$A A^{-1}= A^{-1}A=E. \qquad (2.1)$$

Установим необходимые и достаточные условия существования обратной матрицы.

Теорема 1. *Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь: если матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то матрица A невырождена, т.е. $|A|\neq 0$.

Предположим, что матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, т.е.

$$A A^{-1}=E,$$

тогда согласно свойству 1.1 об определителе произведения двух матриц имеем

$$|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1,$$

откуда $|A|\neq 0$, т.е. матрица A невырождена.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $|A|\neq 0$, то матрица A имеет обратную.

Предположим, что $|A|\neq 0$. Построим новую матрицу $\tilde{A}$ следующим образом:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} в определителе матрицы A. Очевидно, что для построения матрицы $\tilde{A}$ необходимо сначала заменить элементы матрицы A соответствующими им алгебраическими дополнениями, а затем полученную матрицу транспонировать. Построенная таким образом матрица $\tilde{A}$ называется *присоединенной* к матрице A, или *союзной* с A.

Рассмотрим произведение матриц A и $\tilde{A}$:

$$A\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=B$$

Тогда элементы матрицы произведения B определяются по правилу умножения матриц

$$b_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \dots \\ A_{jn} \end{pmatrix}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{in}=\begin{cases} |A|, & при\ \ i=j, \\ 0, & при\ \ i\neq j, \end{cases}$$

свойству 9 определителей и следствию к свойству 10.

Поэтому в результате умножения матриц A и $\tilde{A}$ получим диагональную матрицу

$$B=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=|A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot E\,.$$

Следовательно, имеем равенство

$$A\tilde{A} = |A|E \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что $A \cdot \dfrac{1}{|A|}\tilde{A} = E$. (2.3)

Аналогично устанавливается, что

$$\tilde{A}A = |A|E \quad \text{и} \quad \frac{1}{|A|}\tilde{A}A = E. \tag{2.4}$$

Из равенств (2.3), (2.4)следует, что матрица

$$\frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицей к матрице A, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Теорема доказана.

Для данной матрицы A ее обратная матрица A^{-1} является единственной. Действительно, если предположить, что существует еще одна матрица X такая, что $AX=E$, то умножая последнее равенство на матрицу A^{-1} слева, получим $A^{-1}AX= A^{-1}E$. Так как $A^{-1}A=E$, то последнее равенство запишется $EX=A^{-1}E$ или $X=A^{-1}$. Аналогично рассуждаем в случае равенства $XA=E \to XAA^{-1}=EA^{-1} \to X=A^{-1}$. Единственственность доказана.

Легко проверить справедливость следующих равенств:

1. $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$; 2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3. $\left(A_1A_2\right)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$; 4. $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример 3. Найти матрицу, обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Вычисляем определитель матрицы A. Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу.

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к A

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = C.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы и составляем из них присоединенную матрицу

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3;\quad C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}=-4;\ C_{13}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}=2;$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&0\\1&2\end{vmatrix}=-6;\ C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2;\ C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&0\\1&2\end{vmatrix}=6;\quad C_{23}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1;\ C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}=-4;$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\6&-1&-4\end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле (2.5) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\6&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\ -\frac{2}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A=A\,A^{-1}=E$.

$$A^{-1}A=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\6&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-9&0&0\\0&-9&0\\0&0&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Проверка выполнена и обратная матрица вычислена верно.

2.3 Матричные уравнения

Матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX=B, \tag{2.6}$$

$$XA=B \tag{2.7}$$

где A и B – данные квадратные матрицы порядка n, а X – некоторая матрица того же порядка.

Решением матричного уравнения называется всякая матрица соответствующего порядка, которая, будучи подставлена в матричное уравнение вместо матрицы *X*, обращает уравнение в тождество. Матричные уравнения (2.6) и (2.7) имеют единственные решения, если $|A|\neq 0$. Действительно, умножив эти уравнения соответственно справа и слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,\ \text{или}\ X=A^{-1}B \tag{2.8}$$

$$XAA^{-1}=BA^{-1},\ \text{или}\ X=BA^{-1}. \tag{2.9}$$

Очевидно, что матрица $A^{-1}B$ является решением уравнения (2.6), а матрица $B\,A^{-1}$ – решением уравнения (2.7).

Пример 4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1$ и матрица A является невырожденной.

Находим A^{-1} по формуле (2.5)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле (2.8) получаем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}.$$ Решение закончено.

Если матрица A вырожденная, то этот метод неприменим, так как матрица A^{-1} не существует. В этом случае матричное уравнение имеет или бесконечное множество решений, или не имеет решений вообще.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти ранг матрицы:

1.1 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$,

1.4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

1.5 $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

1.6 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу к заданным матрицам:

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

2.2 $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

2.3 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

2.4 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

2.5 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

2.6 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить матричные уравнения:

3.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

3.2 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$,

3.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

3.4 $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

ЛЕКЦИЯ 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Оглавление

3.1 Основные понятия

Уравнение относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется *линейным*, если его можно записать в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – некоторые числа, называемые *коэффициентами уравнения*, а b – произвольно заданное число, называемое *свободным членом* уравнения.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3.1)$$

в которой каждое уравнение является линейным.

Коэффициенты при неизвестных имеют два индекса из которых первый индекс указывает номер уравнения в котором содержится данный коэффициент, а второй – номер неизвестной, при которой состоит этот коэффициент. В общем случае предполагается, что число уравнений в рассматриваемой системе не равно числу неизвестных.

Решением линейной системы (3.1) называется такая совокупность n чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, которая, будучи подставлена в систему (3.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, превращает все уравнения системы в тождества.

Система уравнений (3.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; система называется *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется *определенной* , если решение единственное и *неопределенной*, если решений более одного. В случае неопределенной системы каждое ее решение называют *частным* решением данной системы, а множество всех частных решений называют *общим решением системы.*

Сопоставим системе (3.1) три матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

где *A – матрица коэффициентов при неизвестных* или *матрица системы, X – матрица – столбец неизвестных*; *B – матрица – столбец свободных членов*.

Используя введенные матрицы и операцию произведения матриц, систему (3.1) можно записать в *матричном виде*

$$AX = B. \qquad (3.3)$$

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, или *равносильными*, когда каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот. При этом будем считать, что все несовместные системы эквивалентны.

Рассмотрим методы решения линейных алгебраических систем.

3.2 Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

Элементарными преобразованиями системы (3.1) называют следующие преобразования: 1) перестановка любых двух уравнений; 2) умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от нуля число; 3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число. Легко установить, что элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в ей эквивалентную. Если к системе (3.1) несколько раз применить элементарные преобразования, то полученная в результате последнего преобразования система уравнений тоже будет эквивалентной исходной системе.

Идея метода Гаусса состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований привести систему к равносильной системе треугольного (или трапециевидного) вида, из которой последовательно, начиная с последних по номеру неизвестных, находятся все остальные.

Отметим, что в процессе приведения системы (3.1) к треугольному виду могут получаться уравнения вида *0 = 0*. Их можно отбросить, так как это, очевидно, приводит к системе уравнений, эквивалентной прежней.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобно приводить к треугольному (трапециевидному) виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Расширенной матрицей системы (3.1) называют матрицу коэффициентов системы (3.1) с добавленным еще одним столбцом свободных членов, который отделяется черточкой, т. е.

$$A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3.4)$$

Пример 1: Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 20. \end{cases}$$

Решение: **1)** Записываем расширенную матрицу системы

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 8 & 20 \end{array}\right) \sim$$

и проводим элементарные преобразования над ее строками.

2) Сделаем коэффициент a_{11} равным 1, используя элементарные преобразования. Это можно сделать вычитанием из элементов второй строки соответствующие элементы первой. Результат помещаем в первую строку, а в качестве второй строки можно записать вторую или первую (мы запишем первую, так как ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки).

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)^{(-2)(-1)} \sim$$

Третью строчку матрицы *A* разделим на 4 (это удобно сделать так как каждый элемент третьей строки нацело делится на 4). Сделать $a_{11} = 1$ можно было и другими способами: а) разделив 3-ю строку матрицы A_b на 4 и поменяв местами первую и полученную после деления на 4 третью строку; б) результат вычитания из 3-й строки матрицы A_b 2-й, первую строку матрицы можно записать в качестве второй, а качестве третьей взять, например, вторую строчку.

3) Используем первую строку последней матрицы (разрешающую строку) для обнулиавния элементов первого столбца, стоящих под первой строкой. Для обнуливания элемента $a_{21}=2$ умножаем каждый элемент первой строки на *(– 2)* и складываем с соответствующими элементами второй строки. Результат пишем во второй строке. Аналогично, для обнуливания элемента $a_{31}=1$ умножаем первую на *(– 1)*, складываем с соответствующими элементами третьей строки и записываем на соответствующие места третьей строки. Получаем

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

4) Сделаем коэффициент $a_{22}=1$, например, умножив вторую строку на (-1) и тем самым, сделав ее *разрешающей строкой*, которая позволит легко обнулить элементы второго столбца под ней стоящие

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

5) Умножив вторую строку на 2 и сложив с соответствующими элементами третьей строки, получим

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

6) Осуществляем *обратный ход* метода Гаусса, восстанавливая равносильную систему по последней расширенной матрице

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ \quad x_2-x_3=-1, \\ \qquad x_3=3 \end{cases}.$$

Система имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем

$$x_3=3.$$

Подставляем это значение x_3 во второе уравнение и находим из него x_2

$$x_2-3=-1 \Rightarrow x_2=2.$$

Подставляем найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение и находим x_1

$$x_1+2-3=0 \Rightarrow x_1=1.$$

7) Выполняем проверку, подставляем найденные значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ в каждое уравнение системы. Получаем истинные высказывания: 1 = 1, 1 = 1, 20 = 20, т. е. проверка выполнена.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Пример 2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Записываем и преобразуем расширенную матрицу системы

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} * \\ \\ * \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ \hline 3 & -1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right)(-3),(-2),(1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ * \\ \\ *(\frac{1}{3}) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -7 & 5 & -15 \\ 0 & 4 & 7 & -10 & 10 \end{array}\right)(-1),(-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & -14 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ * \\ *(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -9 & 4 & -18 \end{array}\right)(9) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 130 & 0 \end{array}\right)(\frac{1}{130}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Используем обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 + 14x_4 = 2, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Из четвертого уравнения $x_4 = 0$; из третьего $x_3 = 2$; из второго $x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 4 = -1$; из первого $x_1 = 6 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 + 1 - 6 + 0 = 1$. Таким образом получили решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$. Делаем проверку, подставляем полученное решение в каждое уравнение системы:

$$2-3-2+0=-3, \qquad -3=-3;$$
$$3+1+4+0=8, \qquad 8=8;$$
$$1-1+6+0=6, \qquad 6=6;$$
$$-1-2+6+0=3. \qquad 3=3.$$

Проверка выполнена.

Ответ: (1;–1;2;0) или $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=0$.

Пример 3: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=6, \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1. \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} * \\ \\ * \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{c:ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \underline{6} \\ \hdashline 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)(-3),(-2),(-6) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -7 & -7 & -11 & -17 \\ 0 & -1 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -35 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & \underline{7} \\ \hdashline 0 & 7 & 7 & 11 & 17 \\ 0 & 8 & 14 & 18 & 35 \end{array}\right)(-7),(-8) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -42 & -38 & -32 \\ 0 & 0 & -42 & -38 & -21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 21 & 19 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Итак, уравнение, соответствующее четвертой строке последней матрицы противоречиво, так как оно привелось к неверному равенству 0 = 11, данная система несовместна.

3.3 Матричный метод решения линейных систем

Выше было показано, что линейную систему (3.1) после введения матриц (3.2) всегда можно записать в матричной форме (3.3)

$$AX = B. \tag{3.3}$$

Если только матрица А квадратная и невырождена, то по формуле (2.8) предыдущей лекции имеем

$$X = A^{-1}B. \tag{3.5}$$

где A^{-1}– обратная матрица к матрице коэффициентов системы, вычисляемая по формуле (2.5) предыдущей лекции

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}, \tag{3.6}$$

где $\tilde{A}$– присоединенная матрица к матрице А.

Пример 4: Решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение: **1)** Введем обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

и записываем систему в матричном виде AX = B.

2) Для нахождения решений системы по формуле (3.5) вычисляем обратную матрицу к матрице A, используя формулу (3.6) (см. п. 2.2).

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) По формуле (3.5) находим искомое решение системы

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

т. е. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Следовательно $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 3.$

Проверку решения выполнить обязательно.

Ответ: (2; -5; 3)

3.4 Метод Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$, т. е. такую систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{3.7}$$

Матрица A коэффициентов этой системы является квадратной. Определитель этой матрицы | A | обозначается Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

и называется *главным определителем системы*. Заменив в главном определителе системы Δ какой-либо столбец, например j –й, столбцом свободных членов B, получим определитель Δ_j, т. е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Теорема 1(правило Камера): *(Г. Камер – швейцарский математик, 1704 – 1752). Если в линейной алгебраической системе число уравнений равно числу неизвестных и главный определитель системы Δ отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Камера*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: обозначим через A, X и B соответственно матрицу коэффициентов системы, матрицу – столбец неизвестных и матрицу – столбец свободных членов (см. 3.2), запишем систему (3.7) в матричном виде

$$AX = B.$$

1)Докажем *существование решения*. Так как матрица A по условию невырождена, то существует обратная к ней матрица A^{-1}. Рассмотрим вектор – столбец $X_0 = A^{-1}B$ и покажем, что он является решением данной системы. Действительно

$$AX_0 = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B.$$

Таким образом, при подстановке вектор-столбца X_0 в систему уравнений $AX = B$, вместо вектор-столбца X получаем тождество. Значит, вектор-столбец X_0 является решением данной системы.

2) Докажем *единственность решения*. Пусть вектор-столбец C – произвольное решение системы $AX = B$. Покажем, что $C = X_0$. Так как вектор-столбец C является решением системы, то справедливо тождество

$$AC = B$$

Умножая обе части этого тождества слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AC) = A^{-1}B, \qquad A^{-1}AC = X_0, \qquad C = X_0.$$

Итак, всякое решение данной системы совпадает с вектором $X_0 = A^{-1}B$, т. е. линейная система имеет единственное решение.

3) Докажем *формулы Крамера*. Согласно матричному методу решения линейной системы $AX = B$ имеем $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – обратная матрица к матрице коэффициентов системы (см. п. 2.2). Согласно правилу умножения матриц получаем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|\Delta|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

где Δ_j – определитель, получающийся из главного определителя системы, заменой j -го столбца столбцом свободных членов *B*.

Действительно, согласно 10-му свойству определителей

$$\begin{gathered} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} = \Delta_1, \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} = \Delta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} = \Delta_n. \end{gathered}$$

Тогда из (3.11) следует $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, что и требовалось доказать.

Пример 5: Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение: **1)** Запишем и вычислим главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

2) Вычисляем вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, заменив в главном определителе системы соответственно первый, второй и третий столбец столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 15 & 3 & 4 \\ 14 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 13 & 3 \\ 9 & 15 & 4 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -15, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 9 & 3 & 15 \\ 5 & 1 & 14 \end{vmatrix} = 9.$$

3) По формулам Крамера (3.10) находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{3} = -5, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3.$$

т. е. $x_1 = 2,\quad x_2 = -5,\quad x_3 = 3$ искомые решения системы. Выполнение проверки обязательно.

Замечание. Если главный определитель линейной системы $\Delta \neq 0$, то решение системы единственно и его можно найти, например, по формулам Крамера (3.10). Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_i \neq 0$, то система несовместна. Если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$ (i = 1, 2, …, n), то система совместна и имеет бесконечное множество решений, которые можно найти по методу Гаусса.

3.5 Теорема Кронекера – Капелли

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными (3.1) или в матричной форме (3.3). Вопрос о разрешимости этой системы рассматривается в следующей теореме.

Теорема 2 (Кронекера – Капелли): *система линейных алгебраических уравнений (3.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов системы равен рангу расширенной матрицы этой системы, т. е.*

$$r(A) = r(A_b). \tag{3.12}$$

Н е о б х о д и м о с т ь: *Если система линейных уравнений совместна, то* $r(A) = r(A_b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Так как система (3.1) совместна, то существует некоторый набор чисел

$$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$$

подстановка которого в систему (3.1) превращает каждое ее уравнение в верное равенство

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.13}$$

Совокупность равенств (3.13) эквивалентна следующему матричному равенству

$$x_1^*\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^*\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n^*\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

из которого следует, что последний столбец расширенной матрицы A_b системы (3.1) является линейной комбинацией ее остальных столбцов. Напомним, что ранг матрицы не меняется, если из нее удалить (или добавить) столбец, являющийся линейной комбинацией других столбцов этой матрицы (см. п. 2.1). Из этого следует, что ранги расширенной матрицы A_b и матрицы коэффициентов А равны, что и требовалось доказать.

Д о с т а т о ч н о с т ь: *Если* $r(A) = r(A_b)$, *то система линейных уравнений совместна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $r(A) = r(A_b) = r$. Выделим r столбцов и r строк матрицы A_b, соответствующие ненулевому минору r -го порядка этой матрицы. Для простоты записи и без ограничения общности предположим, что выбранными оказались первые r столбцов и r строк матрицы. Тогда систему (3.1) можно представить в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \dots - a_{in}x_n, \qquad (i = \overline{1,r}). \qquad (3.15)$$

При этом переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ называют *свободными*. Придавая свободным переменным в равенствах (3.15) произвольные значения, например, $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$, получим систему

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r = b_i, \qquad (i = \overline{1,r}). \qquad (3.16)$$

решения которой называют *базисными* и находят по формулам Крамера (ее главный определитель не равен нулю по построению). Таким образом система (3.16) имеет решение, а это значит, что система (3.1) совместна. Теорема доказана.

Замечание: Теорема Кронекера – Капелли устанавливает совместность линейной алгебраической системы, но не дает метода для практического нахождения всех ее решений. Для этого нужно использовать, например, метод Гаусса.

Пример 6. Исследовать совместность системы линейных уравнений и найти решения

$$a)\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \qquad б)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение: Если в задаче кроме установления совместности системы необходимо найти и все ее решения, то не вычисляя отдельно *r(A)* и $r(A_b)$ ее решают методом Гаусса. При этом над матрицами А и A_b выполняются эквивалентные преобразования в смысле ранга. После приведения матрицы A_b к трапециевидной форме делаем вывод о рангах матриц А и A_b и о совместности системы. В случае совместности находим решение по методу Гаусса.

$$a)\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}(-1),(-2)\\ \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы следует, что *r(A)* = 2 и *r*(A_b) = 3, т. к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad и \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Таким образом $r(A) \neq r(A_b)$ и система а) несовместна.

$$б)\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix}(-3),(-4)\\ \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы следует, что *r(A)* = *r*(A_b) = 2, т. к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и система совместна, но неопределена. По последней расширенной матрице восстанавливаем систему, полагая x_3 – свободной неизвестной, $x_3 = \alpha \in R$. Получаем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + \alpha \\ x_2 = 2 + 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - 3\alpha, \\ x_2 = 2 + 2\alpha, \\ x_3 = \alpha \in R. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -3 - 3\alpha,\ x_2 = 2 + 2\alpha,\ x_3 = \alpha \in R$.

3.6 Системы однородных линейных уравнений

Система линейных уравнений называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

или в матричном виде

$$AX = 0.$$

Очевидно, что всякая система однородных уравнений всегда совместна т. к. *r(A)* = $r(A_b)$ и имеет хотя бы одно *нулевое (тривиальное)* решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Из ранее рассмотренного можем сделать вывод, что любая система однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет нетривиальное решение. Для того чтобы однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Пример 7. Решить однородную линейную систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Для нахождения решений однородной системы используем метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)(-2),(-5) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -16 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из последнего следует, что *r(A)=2*, что меньше числа неизвестных решаемой системы (n = 3).Значит система имеет бесконечное множество решений. Для ее нахождения будем считать $x_2 = \alpha \in R$ свободной переменной и используя последнюю расширенную матрицу запишем

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3\alpha, \\ x_3 = -8\alpha, \\ x_2 = \alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5\alpha, \\ x_2 = \alpha \quad, \\ x_3 = -8\alpha, \end{cases} \quad \alpha \in R.$$

Ответ: $x_1 = 5\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -8\alpha$, $\alpha \in R$.

Пусть $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$,– какое-нибудь ненулевое решение однородной системы (3.17). Это решение можно рассматривать как строку $l_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$, состоящую из n элементов. Тогда строка

$$\lambda l_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

тоже, очевидно, будет решением системы (3.17). Далее, если

$$l_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

– какое-то другое решение системы (3.17), то при любых λ_1 и λ_2 линейная комбинация

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1, \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2, \ldots, \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n)$$

этих решений тоже будет решением системы. Поэтому интересно найти такие линейно независимые решения системы (3.17) через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Линейно независимая система решений $l_1, l_2, \ldots, l_k$ системы (3.17) называется фундаментальной, если каждое решение системы (3.17) является линейной комбинацией решений $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Оказывается, для существования фундаментальных систем решений системы уравнений (3.17) необходимо, чтобы ранг ее матрицы коэффициентов был меньше числа неизвестных этой системы, т. е. $r(A) < n$. При этом каждая из фундаментальных систем решений состоит из $n - r$ решений, где r – ранг матрицы коэффициентов системы.

Общим решением системы (3.17) называют решение вида

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_k l_k$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_k$ некоторая фундаментальная система решений, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$– произвольные числа. Общее решение однородной линейной системы (3.17) ранга r с n неизвестными имеет вид

$$X = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_{n-r} l_{n-r}, \tag{3.18}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_{n\text{-}r}$ – фундаментальная система решений этой системы, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – произвольные постоянные.

Для построения фундаментальной системы решений можно использовать следующий *алгоритм*. Берется любой отличный от нуля определитель D порядка (n-r). Для простоты обычно берется определитель, у которого элементы главной диагонали равны единице, а остальные – нулю. Свободным неизвестным придают поочередно значения, равные элементам первого, второго и т. д. столбцов определителя D, и каждый раз из общего решения находят соответствующие значения главных неизвестных.

Полученные n-r решений составляют фундаментальную систему. Общее решение имеет вид линейной комбинации фундаментальной системы.

Пример 8: Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = 0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+x_5 = 0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3+x_4+2x_5 = 0, \\ \end{cases}$$

$$x_1+3x_2+5x_3+12x_4+9x_5 = 0.$$

Решение: Решаем систему, используя метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{c|ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 & 0\\ \hline 0 & -2 & -4 & -11 & -13 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Из последнего следует, что исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = 0,\\ x_2+2x_3+3x_4+9x_5 = 0,\\ x_4-x_5 = 0.\end{cases}$$

Очевидно что $r(A) = 3$. В качестве главных неизвестных выберем x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5 и выразим главные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_4 = -3x_3 -5x_5,\\ x_2+3x_4 = -2x_3 -9x_5,\\ x_4 = x_5.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 -15x_5,\\ x_2 = -2x_3 -12x_5,\\ x_4 = x_5.\end{cases}$$

Берем определитель порядка $n - r = 5 - 3 = 2$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

и придаем свободным неизвестным x_3, x_5 поочередно значения, равные элементам столбцов этого определителя, получаем в случае $x_3 = 1$ и $x_5 = 0$ следующие значения $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_4 = 0$ и при $x_3 = 0$ и $x_5 = 1 \Rightarrow x_1 = 15$, $x_2 = -12$, $x_4 = 1$.

Тогда фундаментальная система решений запишется

$$l_1 = (1,-2, 1, 0, 0), \qquad l_2 = (15, -12, 0, 1, 1)$$

Общее решение в силу (3.18) запишется

$X = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1, 0, 0) + (15\lambda_2, -12\lambda_2, 0, \lambda_2, \lambda_2) = (\lambda_1 + 15\lambda_2, -2\lambda_1 - 12\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$

где λ_1, λ_2 – произвольные числа.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить системы уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

1.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 6 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = -10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

2. Решить системы уравнений методом Гаусса:

2.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 = 0 \end{cases}$

3. Найти базисные решения системы уравнений:

3.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 2 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18 \\ -x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородных систем:

4.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases}$

ЛЕКЦИЯ 4. ВЕКТОРЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Оглавление

4.1. Векторы. Линейные операции над векторами

Направление вектора определяется углами, которые он составляет с положительными направлениями соответствующих осей: с осью - ; с - , с - . Косинусы этих углов называют направляющими косинусами вектора.2

Суммой векторов и называется третий вектор , получаемый по правилу треугольника: складываемые векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало второго вектора совпало с концом первого; тогда направленный отрезок, соединяющий начало первого вектора с концом второго и есть (рис.4.9). 3

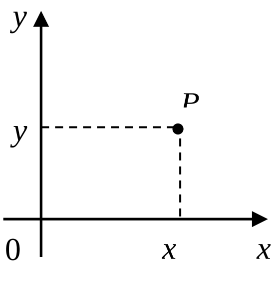


Рис.4.

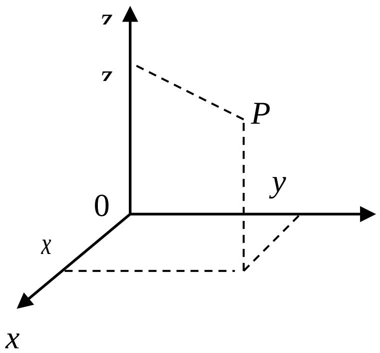


Рис.4.

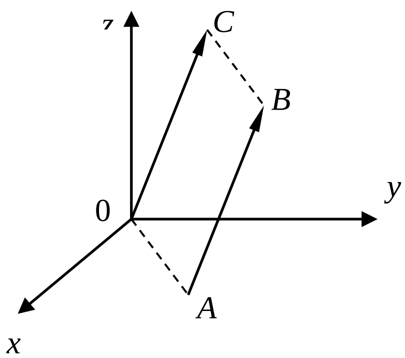


Рис.4.

Направление вектора определяется углами, которые он составляет с положительными направлениями соответствующих осей: с осью - ; с - , с - . Косинусы этих углов называют направляющими косинусами вектора. 2

Суммой векторов и называется третий вектор , получаемый по правилу треугольника: складываемые векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало второго вектора совпало с концом первого; тогда направленный отрезок, соединяющий начало первого вектора с концом второго и есть (рис.4.9). 3

Обобщим известные из школьного курса геометрии сведения о векторах. Известно, что если на плоскости задана прямоугольная декартовая система координат, то каждая точка P плоскости однозначно характеризуется двумя числами (x, y) - *координатами точки* P (рис.4.1). Аналогично, каждой точке P трехмерного пространства (рис.4.2) в заданной системе координат соответствует упорядоченная тройка чисел (x, y, z), называемая *координатами точки* P.

При решении различных задач приходится рассматривать *направленный отрезок*, т.е. множество точек, лежащих между точками A и B прямой с указанным направлением (рис.4.3). Направление такого отрезка принято определять порядком задания точек A и B: именно обозначают через $\overrightarrow{AB}$ направленный отрезок с началом A и концом B, направленный от начала A и концу B. При этом удобно не различать между собой два любых направленных отрезка, если они лежат на параллельных прямых, направленных в одну сторону и имеют одинаковые длины, так как и с физической и с геометрической точки зрения они обозначают одно и тоже.

Вектором называют направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Обозначают вектор так же как и направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$. *Нулевым вектором* называют вектор у которого начало и конец совпадают, обозначение $\vec{0}$ или просто 0.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* (а также *модулем* вектора) и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $\left|\vec{a}\right|$. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*. Векторы называют коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых (рис.4.4). Векторы называют компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны (рис.4.5).

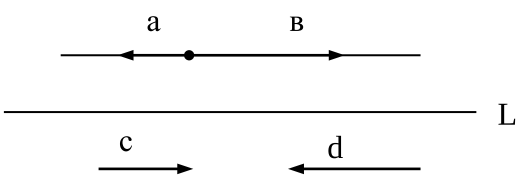


Рис.4.4

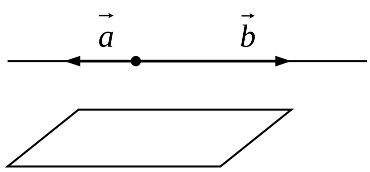


Рис.4.5

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ будем называть *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные модули. Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ перенести параллельно самому себе, то очевидно получится направленный отрезок, равный исходному (рис.4.3). Всякий направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ можно перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Понятно, что вектору $\overrightarrow{AB}$ соответствует один и только один направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ с началом в начале координат. *Координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$ называются три числа (x, y, z) - координаты точки C. Вектор с координатами (x, y, z) принято обозначать $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$. При этом числа x, y, z называют и *проекциями вектора* на соответствующей оси координат (рис.4.6).

Очевидно, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = (x, y, z)$, то его модуль находится по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (4.1)$$

Направление вектора *определяется углами, которые он составляет с положительными направлениями соответствующих осей: с осью* Ox - $\angle\alpha$ *; с* Oy - $\angle\beta$, *с* Oz - $\angle\gamma$. *Косинусы этих углов называют* направляющими косинусами вектора.

Пример 1. Задан двумерный вектор $\vec{a} = (x, y)$. Найти углы, образуемые этим вектором с положительным направлением соответствующих осей координат и установить зависимость между направляющими косинусами этого вектора.

Решение. Находим модуль вектора $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Из ΔCNO и ΔCMO соответственно находим

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{a}\right|} \qquad \cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{a}\right|}. \tag{4.2}$$

Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \left(\frac{x}{\left|\vec{a}\right|}\right)^2 + \left(\frac{y}{\left|\vec{a}\right|}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{\left|\vec{a}\right|} = 1$

и т.о. зависимость между направляющими косинусами двумерного вектора запишется

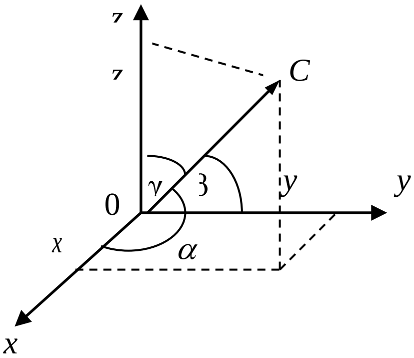


Рис.4.

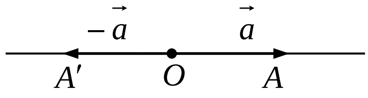


Рис.4.1

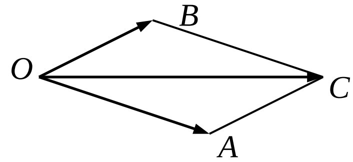


Рис.4.1

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

В случае трехмерного вектора эта зависимость имеет вид

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

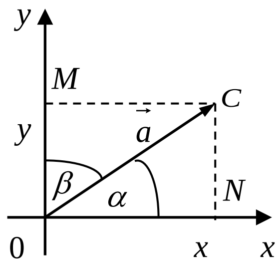


Рис.4.

Если точка A имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а точка B координаты (x_2, y_2, z_2), то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (см. рис.4.8).

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называется третий вектор $\overrightarrow{AD}$, получаемый по правилу треугольника: складываемые векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало второго вектора совпало с концом первого; тогда направленный отрезок, соединяющий начало первого вектора с концом второго и есть $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (рис.4.9).

Из определения действия сложения следует, что:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (свойство переместительности);

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (свойство сочетательности).

Для каждого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис.4.10) существует *противоположный вектор* $-\vec{a} = \overrightarrow{OA'}$, имеющий ту же длину, но противоположное направление. Очевидно, что $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = 0$, где 0 - нуль-вектор.

Из определения суммы векторов следует *правило параллелограмма* для сложения двух векторов – сумма двух векторов $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, приведенных к общему началу 0, представляет собой диагональ OC параллелограмма $OACB$, построенного на слагаемых векторах (рис.4.11).

Аналогично определяется сумма нескольких векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots \overrightarrow{a_n}$. Строятся векторы $\overrightarrow{a_1'} = \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2'} = \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n'} = \overrightarrow{a_n}$ так, чтобы начало вектора $\overrightarrow{a_2'}$ совпало с концом вектора $\overrightarrow{a_1'}$ и т.д., начало вектора $\overrightarrow{a_n'}$ совпадало с концом вектора $\overrightarrow{a_{n-1}'}$. Тогда вектор $\vec{S}$, начало

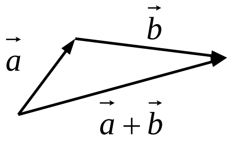


Рис.4.14

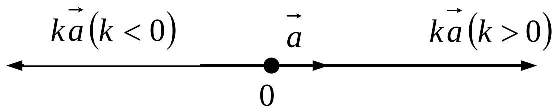


Рис.4.15

которого совпадает с началом вектора $\overrightarrow{a'_1}$, а конец с концом вектора $\overrightarrow{a'_n}$ будем называть *суммой векторов* $\overrightarrow{a'_1}, \overrightarrow{a'_2}, \overrightarrow{a'_3}, ...\overrightarrow{a'_n}$ (рис.4.12).

Вычитание векторов определяется как операция, обратная сложению. *Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. В параллелограмме, построенном на данных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их разностью является соответственно направленная вторая диагональ параллелограмма (рис.4.13).

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо *неравенство треугольника*

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|.$$

Оно следует из того, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны (рис.4.14).

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа λ, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$ или $\vec{a} = 0$ считают $\lambda\vec{a}$=0. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и не равны нулю, то $\vec{a} = \lambda\vec{b}, \vec{b} = \frac{1}{\lambda}\vec{a}$.

Эта операция обладает свойствами:

1) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (сочетательность);
2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (распределительность относительно чисел);
3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (распределительность относительно векторов).

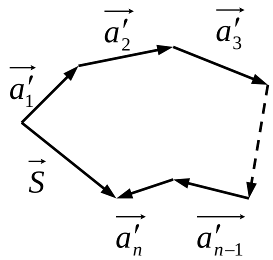


Рис.4.1

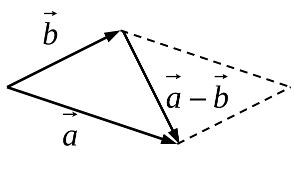


Рис.4.1

Проекцией точки A *на ось* l (рис.4.16) называется основание A' перпендикуляра AA', опущенного из точки A на эту ось.

Под *компонентой (составляющей)* вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ относительно оси l (рис.4.16) понимается вектор $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{A'B'}$, начало которого A' есть проекция на ось l начала A вектора $\vec{a}$, а конец которого B' есть проекция на ось l конца B этого вектора.

Под проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l понимается скаляр $a_l = \pm\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, равный модулю его компоненты $\overrightarrow{a'}$ относительно оси l, взятой со знаком плюс, если направление компоненты совпадает с направлением оси l, и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси l. Заметим, что если $\vec{e}$ - единичный вектор оси l, то для компоненты $\overrightarrow{a'}$ справедливо равенство

$$\overrightarrow{a'} = a_l \vec{e} \tag{4.5}$$

Пусть вектор $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ задан своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz.

Построим параллелепипед (рис.4.17), диагональю которого является вектор $\vec{a}$, а

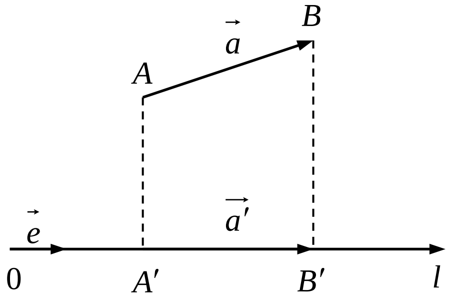


Рис.4.16

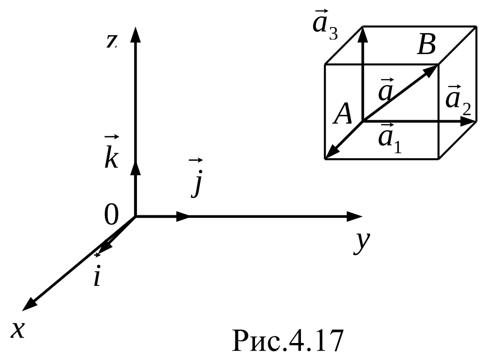


Рис.4.17

ребрами служат его компоненты $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ относительно координатных осей. Имеем разложение

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} \tag{4.6}$$

Если ввести единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные по осям координат, то на основании (4.5) будем иметь

$$\overrightarrow{a_1} = a_x \vec{i},\ \overrightarrow{a_2} = a_y \vec{j},\ \overrightarrow{a_3} = a_z \vec{k}. \tag{4.7}$$

Подставляя эти выражения в равенство (4.6), получаем координатную форму вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \tag{4.8}$$

Если $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, то аналогично

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Теперь рассмотренные выше линейные операции над векторами можно записать в координатной форме:

1) $\lambda\vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$ или $\lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)$, (4.9)

т.е. при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр;

2) $\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x \pm b_x\right)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + \left(a_z \pm b_z\right)\vec{k}$ (4.10)

или $\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\right)$, т.е. при сложении (или вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются).

4.2. Скалярное произведение векторов

Под *скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi. \qquad (4.11)$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается также символами $\vec{a}\vec{b}$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}$. *Углом* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол φ, на который следует повернуть один из векторов, для того чтобы их направления совпадали (рис.4.18). В дальнейшем под углом между векторами будем понимать угол φ, удовлетворяющий условию $0\le\varphi\le\pi$.

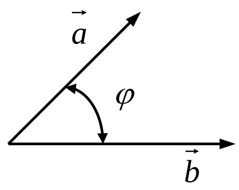


Рис.4.18

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2) $\vec{a}^{\,2}=\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2$;

3) $\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;

4) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},$$

то перемножая эти векторы как многочлены, что возможно в силу свойства 4) и учитывая соотношения

$$\vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\vec{i}=0 \text{ и } \vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\vec{k}=1,$$

будем иметь

$$\vec{a}\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Окончательно

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (4.12)$$

т.е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

В частности, расстояние d между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. Поэтому

$$d=\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (4.13)$$

Из формулы (4.11) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}} \qquad (4.14)$$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}=(2;2;-1)$ и $\vec{b}=(4;-2;4)$. Найти: 1) векторы $\vec{c}=-3\vec{a}$ и $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$; 3) скалярное произведение векторов $\left(\vec{c},\vec{d}\right)$; 4) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Решение. 1) По определению $\vec{c}=-3\vec{a}=(-6;-6;3)$ и $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}=(4;4;-2)-(4;-2;4)=$ $=(0;6;-6)$.

2) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$; $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}=6$;

3) По формуле (4.12) получаем

$$(\vec{c},\vec{d})=(-6)\cdot 0+(-6)\cdot 6+3\cdot(-6)=-54.$$

4) По формуле (4.14) угол φ между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ определяется равенством

$\cos\varphi=\dfrac{\vec{c}\vec{d}}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|}=\dfrac{-54}{9\cdot 6\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, отсюда

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Пример 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$. Установить условие коллинеарности этих векторов.

Решение. Если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, где λ - некоторое число или в координатной форме $(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_2,\lambda y_2,\lambda z_2)$. Из равенства векторов следует

$$x_1=\lambda x_2,\ y_1=\lambda y_2,\ z_1=\lambda z_2$$

$$\text{или } \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}, \tag{4.15}$$

Таким образом, если векторы коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны (справедливо и обратное утверждение).

Пример 4. Векторы $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ перпендикулярны. Установить условие перпендикулярности этих векторов.

Решение. Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\varphi=0$. Тогда согласно формулам (4.11 – 4.12) имеем

$$(\vec{a},\vec{b})=0 \text{ или } x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0, \tag{4.16}$$

Таким образом, если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Пример 5. Известно, что отрезок AB точкой M делится в отношении λ, т.е. $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$, $\lambda>0$. Найти координаты точки $M(x,y,z)$, если $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ (рис.4.19).

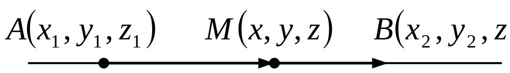


Рис.4.19

Решение. Запишем отношение $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$ в векторной форме вводя векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$, $\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$ или в координатной форме

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=(\lambda(x_2-x),\lambda(y_2-y),\lambda(z_2-z)).$$

Из равенства векторов следует равенство соответствующих координат

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\ y-y_1=\lambda(y_2-y),\ z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

Откуда

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (4.17)$$

Формулы (4.16) называются *формулами деления отрезка в заданном отношении..*

Если точка M - середина отрезка AB, то $\lambda=1$ и *формулы деления отрезка пополам* запишутся

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (4.17')$$

4.3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\equiv\left[\vec{a},\vec{b}\right] \qquad (4.18)$$

для которого:

1) модуль численно равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е.

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi \qquad (4.19)$$

где $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\left(0\le\varphi\le\pi\right)$ (рис.4.20);

2) этот вектор перпендикулярен обоим перемножаемым векторам (иначе говоря, перпендикулярен плоскости построенного на них параллелограмма), т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) направление вектора $\vec{c}$ таково, что если смотреть из его конца вдоль вектора, то поворот по кратчайшему пути от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против движения часовой стрелки (рис.4.20).

Укажем основные свойства векторного произведения:

1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (антикоммутативность);
2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;
3) $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ (сочетательность);
4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (распределительность).

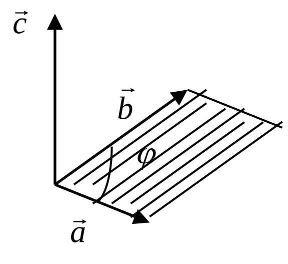


Рис.4.20

Получим формулу для вычисления векторного произведения в координатной форме. Пусть даны два вектора

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Перемножая векторно эти равенства и используя свойства векторного произведения, получим сумму девяти слагаемых

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\\&=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+\\&+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+\\&+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right).\end{aligned}$$

(4.19)

Из определения векторного произведения следует, что для ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0, \qquad \vec{j}\times\vec{j}=0, \qquad \vec{k}\times\vec{k}=0,$$

$$\vec i\times\vec j=-\left(\vec j\times\vec i\right)=\vec k\,,\qquad \vec j\times\vec k=-\left(\vec k\times\vec j\right)=\vec i\,,\qquad \vec k\times\vec i=-\left(\vec i\times\vec k\right)=\vec j\,.$$

Поэтому из формулы (4.19) получаем

$$\vec a\times\vec b=\vec i\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec j\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\vec k\left(a_xb_y-a_yb_x\right)=$$

$$=\vec i\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix} \tag{4.20}$$

или в виде определителя третьего порядка

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{4.21}$$

Пример 6. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$ и $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$, совпадающие со сторонами треугольника.

Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах, то площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, т.е. $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Сначала вычисляем

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=15\vec i+12\vec j+16\vec k\,.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|15\vec i+12\vec j+16\vec k\right|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{1}{2}\sqrt{625}=12{,}5\ \text{(кв.ед.)}$$

4.4. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением векторов $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ называется число

$$\vec a\vec b\vec c=\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c\,. \tag{4.22}$$

Здесь первые два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\left(\vec a\times\vec b\right)$ умножается скалярно на третий вектор $\vec c$.

Найдем выражение для смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов. Определим сначала $\vec a\times\vec b$:

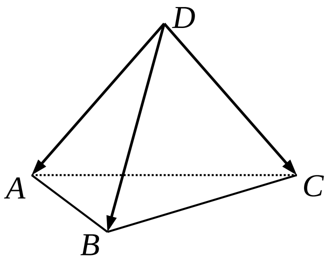
$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Так как $\vec c=c_x\vec i+c_y\vec j+c_z\vec k$, то по формуле (4.12) находим

$$\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$



Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят соответствующие координаты перемножаемых векторов.

Справедливы следующие основные свойства смешанного произведения.

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

Покажем, что смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах. Для этого построим параллелепипед, ребрами которого, являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, исходящие из общей вершины О.

Тогда $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\vec{S}$ представляет площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. есть площадь основания параллелепипеда. Высота этого параллелепипеда H, очевидно равна

$$H=\pm Пр_{\vec{S}}\vec{c}=\pm\left|\vec{c}\right|\cos\varphi, \tag{4.23}$$

где $\vec{S}=\vec{a}\times\vec{b}$ и знак плюс соответствует острому углу $\varphi=\angle\left(\vec{c},\vec{s}\right)$, а знак минус – тупому.

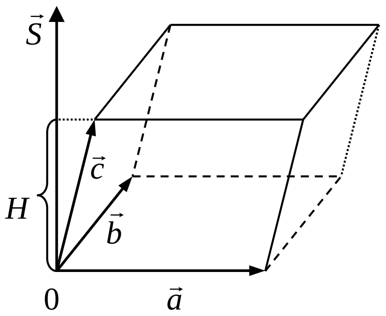


Рис. 4.21

На основании определения скалярного произведения имеем $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{S}\vec{c}=S\cdot Пр_{\vec{S}}\vec{c}=\pm SH=\pm V$,

где V - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm V.$$

Из геометрического смысла смешанного произведения трех векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ очевидно следует, что если векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0. \tag{4.25}$$

Пример 7. Даны вершины тетраэдра: $A(2{,}3{,}1)$, $B(4{,}1{,}-2)$, $C(6{,}3{,}7)$, $D(-5{,}-4{,}8)$. Найти его объем.

Решение. Объем тетраэдра (пирамиды) равен шестой части численного значения смешанного произведения векторов, исходящих из одной вершины (например с вершины D), т.е.

$$V=\pm\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC}.$$

Строим векторы $\overrightarrow{DA}=(7{,}7{,}-7)$, $\overrightarrow{DB}=(9{,}5{,}-10)$, $\overrightarrow{DC}=(11{,}7{,}-1)$.

Тогда

$$\overrightarrow{DA}\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}7 & 7 & -7\\ 9 & 5 & -10\\ 11 & 7 & -1\end{vmatrix}=7(-44)=-308 \text{ и}$$

$$V_T=\frac{1}{6}\cdot 308=51\frac{1}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны точки А (3,-4,7), В (5,-6,8). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BE}$, если т. Е – середина отрезка АВ.

2. Даны четыре точки А(5,6,-8), В(8,10,-3), С(1,-2,4), D (7,6,14). Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$?

3. Даны векторы $\bar{a}=(2,-1,-2),\ \bar{в}=(8,-4,0)$. Найти:

   а) векторы $\bar{c}=2\bar{a}$ *и* $\bar{d}=\bar{в}-\bar{a}$;

   б) длины векторов $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$;

   в) скалярный квадрат вектора $\vec{d}$;

   г) скалярное произведение векторов $\vec{c}\vec{d}$;

   д) угол между векторами $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}=(1,-1,\sqrt{2})$.

5. Проверить, что четыре точки А(3,-1,2), В(1,2,-1), С(-1,1,-3), D(3,-5,3), служат вершинами трапеции и найти длину ее средней линии.

6. Векторы $\overline{AB}=(2,6,-4)$ *и* $\overline{AC}=(4,2,-2)$ совпадают со сторонами треугольника АВС. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами АМ, ВN, СР.

7. Даны векторы $\bar{a}=(4,-2,-4),\ \bar{в}=(6,-3,2)$. Вычислить:

   а) $\vec{a}\,\vec{в}$; б) $\sqrt{\vec{a}^{\,2}},\ \sqrt{\vec{в}^{\,2}}$; в) $(2\bar{a}-3\bar{в})(\bar{a}+2\bar{в})$; г) $(\vec{a}+\vec{в})^2$.

8. Даны вершины треугольника А(3,2,-3), В(5,1,-1), и С(1,-2,1). Определить его внутренний угол при вершине А.

9. Даны вершины четырехугольника А(1,-2,2), В(1,4,0), С(-4,1,1)и D(-5,-5,3). Доказать что его диагонали АС и ВD взаимно перпендикулярны.

10. Даны три точки А(1,2,0), В(3,0,-3) и С(5,2,6). Вычислить площадь треугольника АВС.

11. Даны вершины треугольника А(1,-1,2), В(5,-6,2) и С(1,3,-1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.

12. Даны три вектора $\bar{a}=(1,-1,3),\ \bar{в}=(-2,2,1)$ *и* $\bar{c}=(3,-2,5)$. Вычислить $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$.

13. Доказать, что четыре точки А(1,2,-1), В(0,1,5), С(-1,2,1), D(2,1,3) лежат в одной плоскости.

14. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1) и D(4,1,3).

ЛЕКЦИЯ 5. N–МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Оглавление

5.1. n–мерное векторное пространство. Линейное пространство

В предыдущей лекции было показано, что между геометрическими векторами и их координатами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Каждому трехмерному вектору $\vec{a}$ сопоставляется упорядоченная тройка чисел $(x,\ y,\ z)$, каждому двумерному вектору – упорядоченная пара чисел $(x,\ y)$, каждому одномерному вектору - одно число $\vec{a}=(x)$. Однако существуют такие объекты для характеристики которых необходимо n чисел. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$. Поэтому введем понятие n-мерного вектора, обобщив понятие вектора.

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i - i-$я координата (компонента) вектора $\vec{x}$.

Обобщим все введенные ранее понятия и операции для трехмерного случая на n-мерный случай.

Два n-мерных вектора $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ называются *равными,* если равны их соответствующие координаты, то есть $\vec{x}=\vec{y}$, если $x_i = y_i$ при всех $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Таким образом, равенство двух n-мерных векторов эквивалентно системе из n числовых равенств.

Суммой двух векторов $\vec{x},\ \vec{y}$ одинаковой размерности n называется n-мерный вектор $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат складываемых векторов $z_i = x_i + y_i$ при $i=1,\ 2,\ldots,\ n$, т.е. если

$$\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \vec{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

то

$$\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,\ x_n+y_n). \tag{5.1}$$

Произведением n-мерного вектора $\vec{x}$ на число λ называется n-мерный вектор $\vec{y}=\lambda\vec{x}$, координаты которого получаются из координат вектора $\vec{x}$ умножением на число λ, т.е. если $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $\lambda\in R$, то

$$\vec{y}=\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ldots,\ \lambda x_n). \tag{5.2}$$

Вектор $(-1)\vec{x}=-\vec{x}$ называется *противоположным* вектору $\vec{x}$.

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$.

Линейные операции над n-мерными векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (коммутативность);
2. $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (ассоциативность);
3. $\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$ (ассоциативность относительно скалярного множителя);
4. $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ (распределительность относительно суммы векторов);
5. $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ (распределительность относительно суммы числовых множителей);
6. Существует нулевой вектор $\vec{0}=(0, 0,\ldots, 0)$, такой что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$;
7. Для любого вектора $\vec{x}$ существует противоположный вектор $(-\vec{x})$ такой, что $\vec{x}+(-\vec{x})=0$;
8. $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ для любого $\vec{x}$ (особая роль множителя 1).

Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется *векторным пространством* и обозначается через R^n. Таким образом, рассмотренные ранее одномерные, двумерные и трехмерные геометрические векторы образуют соответственно пространства R^1, R^2 *и* R^3.

Следует отметить, что под $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ можно понимать не только векторы, но и элементы любой природы. В этом случае соответствующее множество элементов называют *линейным пространством.*

Линейным пространством называют множество элементов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z},\ldots$ любой природы для которых введены операции сложения и умножения на число, обладающие свойствами 1-8. Приведем примеры линейных пространств.

Пример 1. Линейным пространством является множество всех многочленов $P_n(z)$ степени не превышающей $n\ (n\in N)$, если под сложением и умножением на число будем понимать обычное сложение многочленов и умножение многочлена на число.

Пример 2. Множество квадратных матриц порядка n с ранее введенными операциями сложения и умножения на число.

5.2. Размерность и базис векторного пространства

Рассмотрим векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2,\ldots, \vec{x}_n$. Вектор $\vec{x}$, представимый в виде

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n, \tag{5.3}$$

где $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ – некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2,\ldots, \vec{x}_n$.

Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2,\ldots, \vec{x}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие постоянные числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, что выполняется равенство

$$\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}. \tag{5.4}$$

Если же равенство (5.4) выполняется только при всех $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$, равных нулю, то векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2,\ldots, \vec{x}_n$ называются *линейно независимыми.*

Можно показать, что если векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2,\ldots, \vec{x}_n$ линейно зависимы, то по крайней мере один из них линейно выражается через остальные. Справедливо и обратное утверждение: если один из векторов линейно выражается через остальные, то эти векторы в совокупности линейно зависимы.

Покажем, что *два вектора* $\vec{x}_1$ *и* $\vec{x}_2$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Пусть векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ линейно зависимы, т.е.

$$\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2=\vec{0},\ \left(\lambda_1\neq 0\right),$$

тогда

$$\vec{x}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{x}_2=\alpha\vec{x}_2\text{, где } \alpha=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Из определения произведения вектора $\vec{x}_2$ на число α следует, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ коллинеарны.

Обратно, из коллинеарности векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ следует, что один из них всегда можно «растянуть» или «сжать», чтобы получить второй вектор, т.е. $\vec{x}_1=\alpha\vec{x}_2$, откуда $\vec{x}_1-\alpha\vec{x}_2=0\ \left(\alpha\neq 0\right)$, что и означает их линейную зависимость.

Можно показать, что *три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Отметим некоторые критерии линейной зависимости векторов.

1. *Если среди векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ *имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.* Действительно, если, например, $\vec{x}_1=\vec{0}$, то равенство (5.4) справедливо при $\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_m=0$. А это значит, что векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ линейно зависимы.

2. *Если часть векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ *линейно зависимы, то все эти векторы – линейно зависимые.* Действительно, пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ $\left(k<m\right)$ линейно зависимы, т.е.

$$\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k=\vec{0},$$

где среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ имеются отличные от нуля. Тогда имеет место соотношение

$$\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k+0\vec{x}_{k+1}+\ldots+0\vec{x}_m=\vec{0},$$

из которого следует, что векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ линейно зависимы.

Пример 3. Выяснить, являются ли векторы $\vec{x}_1=\left(1, 2, 0, 1\right)$, $\vec{x}_2=\left(0, 4, 2, -2\right)$, $\vec{x}_3=\left(3, 4, -1, 2\right)$ линейно зависимыми.

Решение. Если векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независимы, то векторное равенство $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\lambda_3\vec{x}_3=\vec{0}$ или

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\4\\2\\-2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

имеет место лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Если это векторное равенство имеет место при некотором $\lambda_i\neq 0\ \left(i=1, 2, 3\right)$, то векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно зависимы. Так как векторы четырехмерны, то записанное векторное равенство равносильно линейной системе

$$\begin{cases}\lambda_1 \qquad\quad +3\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1+4\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \qquad 2\lambda_2-\ \lambda_3=0,\\ \lambda_1\ -2\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, приведем ее к виду

$$\begin{cases} \lambda_1 \quad + 3\lambda_3 = 0, \\ \quad 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \qquad 0 = 0, \\ \qquad 0 = 0, \end{cases}$$

из которого следует, что однородная система имеет бесконечное множество решений $\lambda_1 = -6\alpha,\ \lambda_2 = \alpha,\ \lambda_3 = 2\alpha$, где $\alpha \in R$, среди которых есть и ненулевые (например, при $\alpha = 1$ $\lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$). Следовательно, векторы $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3$ линейно зависимые.

Линейное пространство R называется ***n*-мерным**, *если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые из (n+1) векторов уже являются зависимыми.*

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. Число *n* называется *размерностью пространства R* и обозначается $\dim(R)$.

Совокупность n линейно независимых векторов *n-мерного векторного пространства R называется его базисом*.

Теорема 1. *Каждый вектор $\vec{x}$ линейного n - мерного векторного пространства R^n можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ – произвольный базис *n*-мерного пространства R^n и $\vec{x} \in R^n$. Так как каждые $n+1$ векторов (*n*-мерного!) пространства R^n линейно зависимы, то зависимы, в частности, и векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n, \vec{x}$, т.е. существуют такие не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$, что

$$\alpha_1\vec{l}_1 + \alpha_2\vec{l}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{l}_n + \alpha\vec{x} = \vec{0}.$$

При этом $\alpha \neq 0$, ибо если $\alpha = 0$, то хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ было бы отлично от нуля, и векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\vec{l}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\vec{l}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\vec{l}_n$$

или, полагая $-\dfrac{\alpha_i}{\alpha} = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\vec{x} = x_1\vec{l}_1 + x_2\vec{l}_2 + \ldots + x_n\vec{l}_n. \qquad (5.5)$$

Это представление вектора $\vec{x}$ через $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ *единственно,* так как если допустить какое-либо другое выражение

$$\vec{x} = y_1\vec{l}_1 + y_2\vec{l}_2 + \ldots + y_n\vec{l}_n, \qquad (5.6)$$

то вычитая из него почленно (5.5), получим

$$\vec{0} = (y_1 - x_1)\vec{l}_1 + (y_2 - x_2)\vec{l}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\vec{l}_n,$$

откуда из линейной независимости векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ следует, что

$$y_1 - x_1 = 0, \quad y_2 - x_2 = 0, \ldots, \quad y_n - x_n = 0$$

или

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \ \ldots\ , \quad y_n = x_n.$$

Равенство (5.5) называется *разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$*, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$*. Из теоремы следует, что если задан базис *n*-мерного векторного пространства *R*, то каждый вектор из *R* имеет единственным образом определенные координаты в этом базисе.

Теорема 2. *Если* $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ *– линейно независимые векторы пространства R и любой вектор* $\vec{a} \in R$ *линейно выражается через* $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$, *то эти векторы образуют базис пространства R.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ по условию линейно независимы. Докажем, что в пространстве R нет больше чем n линейно независимых векторов. Возьмем произвольные $m > n$ векторов из R: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$. По условию, каждый из них можно линейно выразить через $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$:

$$\begin{aligned} &\vec{a}_1 = \alpha_{11}\vec{l}_1 + \alpha_{12}\vec{l}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\vec{l}_n, \\ &\vec{a}_2 = \alpha_{21}\vec{l}_1 + \alpha_{22}\vec{l}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\vec{l}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\vec{a}_m = \alpha_{m1}\vec{l}_1 + \alpha_{m2}\vec{l}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\vec{l}_n. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Рассмотрим матрицу,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Ранг этой матрицы не превосходит n: $r(A) < \min(n, m) = n$ следовательно, среди ее столбцов имеется не более чем n линейно независимых. Но так как $m > n$, то m столбцов этой матрицы линейно зависимые, а значит и m векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависимы. Таким образом, пространство R n-мерно и $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ – его базис, что и требовалось доказать.

В соответствии с выше изложенным прямая линия является одномерным пространством, базис множества векторов, расположенных на некоторой прямой, состоит из одного вектора. Плоскость является двумерным пространством, базис множества векторов, расположенных на некоторой плоскости состоит из двух неколлинеарных векторов, например, ортонормированный базис $\vec{l}_1 = \vec{i}, \vec{l}_2 = \vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные векторы по направлению совпадающие с положительным направлением перпендикулярных осей Ox и Oy соответственно. Обычное пространство является трехмерным, его базис состоит из трех некомпланарных векторов, например, ортонормированный базис $\vec{l}_1 = \vec{i}, \vec{l}_2 = \vec{j}, \vec{l}_3 = \vec{k}$ – три взаимоперпендикулярных единичных вектора по направлению совпадающие соответственно с положительным направлением осей Ox, Oy, Oz.

Пространство P_n многочленов степени не выше n имеет размерность $n+1$. В самом деле, многочлены

$$1, t, t^2, \ldots, t^n$$

линейно независимы, и каждый многочлен от t степени не выше n через них выражается очевидным образом.

Отметим, что в каждом пространстве можно указать сколько угодно базисов, но при этом все базисы заданного пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Пример 4. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \vec{l}_1 + 2\vec{l}_2 = (1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = 3\vec{l}_1 - \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = (3, -1, 1)$, $\vec{a}_3 = \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = (0, 1, 1)$. Показать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{b} = \vec{l}_1 - 2\vec{l}_2 + 2\vec{l}_3 = (1, -2, 2)$ по этому базису.

Решение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис, если они линейно независимы, т.е. если векторное равенство $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Векторное равенство равносильно системе трех линейных однородных уравнений, решение которой находим методом Гаусса

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ -7\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 8\lambda_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Из этого следует, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно независимы и образуют базис.

Разложить вектор $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ это значит представить его в виде линейной комбинации этих векторов

$$\vec{b} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3.$$

Подставив в последнее равенство значения векторов $\vec{b}$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

учитывая равенство векторов, получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения β_1, β_2, β_3

$$\begin{cases} \beta_1 + 3\beta_2 = 1, \\ 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = -2, \\ \beta_2 + \beta_3 = 2. \end{cases}$$

Решив систему получим $\beta_1 = -\frac{5}{4}, \; \beta_2 = \frac{3}{4}, \; \beta_3 = \frac{5}{4}$. Тогда искомое разложение запишется

$$\vec{b} = -\frac{5}{4}\vec{a}_1 + \frac{3}{4}\vec{a}_2 + \frac{5}{4}\vec{a}_3.$$

5.3. Переход к новому базису

Пусть в пространстве R^n имеются два базиса

$$\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n \text{ и } \vec{l}_1^{\,*}, \vec{l}_2^{\,*}, \ldots, \vec{l}_n^{\,*}.$$

Первый условимся называть *старым базисом,* второй – *новым*. Каждый из элементов нового базиса, по теореме 1, можно выразить через векторы старого базиса

$$\begin{aligned} \vec{l}_1^{\,*} &= a_{11}\vec{l}_1 + a_{12}\vec{l}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{l}_n, \\ \vec{l}_2^{\,*} &= a_{21}\vec{l}_1 + a_{22}\vec{l}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{l}_n, \\ &\ldots \\ \vec{l}_n^{\,*} &= a_{n1}\vec{l}_1 + a_{n2}\vec{l}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{l}_n. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Можно сказать, что новые базисные векторы получаются из старых с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Матрица A называется *матрицей перехода* от базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ к базису $\vec{l}_1^*, \vec{l}_2^*, \ldots, \vec{l}_n^*$ (ее столбцы являются коэффициентами разложения нового базиса по старому (см. 5.9)). Матрица A^{-1}, обратная к матрице (5.10), является матрицей перехода от нового базиса $\vec{l}_1^*, \vec{l}_2^*, \ldots, \vec{l}_n^*$ к старому $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$.

Определитель матрицы перехода A не равен нулю, так как в противном случае ее столбцы, а следовательно и векторы $\vec{l}_1^*, \vec{l}_2^*, \ldots, \vec{l}_n^*$ были бы линейно зависимы.

Обратно, если определитель матрицы A отличен от нуля, то столбцы ее линейно независимы, а значит и векторы $\vec{l}_1^*, \vec{l}_2^*, \ldots, \vec{l}_n^*$, получающиеся из базисных $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ с помощью матрицы A тоже линейно независимы, т.е. образуют некоторый новый базис. Значит, матрицей перехода может быть любая невырожденная матрица порядка n.

Найдем зависимость между координатами одного и того же вектора $\vec{x}$ в старом и новом базисах. Пусть вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ в старом и $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ в новом базисах, т.е.

$$\vec{x} = x_1\vec{l}_1 + x_2\vec{l}_2 + \ldots + x_n\vec{l}_n \quad \text{и} \quad \vec{x} = x_1^*\vec{l}_1^* + x_2^*\vec{l}_2^* + \ldots + x_n^*\vec{l}_b^* \tag{5.11}$$

Подставляя вместо $\vec{l}_1^*, \vec{l}_2^*, \ldots, \vec{l}_n^*$ их выражения через $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ из (5.9), получаем

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x_1^*\left(a_{11}\vec{l}_1 + a_{12}\vec{l}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{l}_n\right) + x_2^*\left(a_{21}\vec{l}_1 + a_{22}\vec{l}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{l}_n\right) + \ldots + x_n^*\left(a_{n1}\vec{l}_1 + a_{n2}\vec{l}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{l}_n\right) = \\
&= \left(x_1^*a_{11} + x_2^*a_{21} + \ldots + x_n^*a_{n1}\right)\vec{l}_1 + \left(x_1^*a_{12} + x_2^*a_{22} + \ldots + x_n^*a_{n2}\right)\vec{l}_2 + \ldots + \\
&+ \left(x_1^*a_{1n} + x_2^*a_{2n} + \ldots + x_n^*a_{nn}\right)\vec{l}_1.
\end{aligned}$$

Так как разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ единственно, то отсюда следует, что

$$\begin{cases}
x_1 = a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \ldots + a_{n1}x_n^*, \\
x_2 = a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{n2}x_n^*, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x_n = a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_2^* + \ldots + a_{nn}x_n^*.
\end{cases} \tag{5.12}$$

Таким образом, старые координаты вектора $\vec{x}$ получаются из новых его координат с помощью матрицы A (5.10). При этом коэффициенты соответствующих разложений (5.12) образуют строки матрицы A (она является транспонированной по отношению к матрице коэффициентов системы (5.9)).

Из (5.12) следует, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$, а $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ – координаты того же вектора в базисе $\vec{l}_1^*, \vec{l}_2^*, \ldots, \vec{l}_n^*$, то имеет место равенство

$$X = AX^* \tag{5.13}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

A – матрица, определяемая формулой (5.10).

Замечание. Равенство (5.13) выражает старые координаты вектора $\vec{x}$ через его новые координаты. Чтобы получить формулы, выражающие новые координаты через старые достаточно разрешить матричное равенство (5.13) относительно X^*. Для этого умножим (5.13) слева на обратную матрицу к матрице A $A^{-1}X = A^{-1}AX^*$ и учтем что $A^{-1}A = E$ и $EX^* = X^*$, тогда

$$X^* = A^{-1}X \qquad (5.15)$$

Пример 5. Решить пример 2, используя формулу (5.15).

Решение. Запишем матрицу A перехода от старого базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, к новому $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, учитывая что

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{l}_1 + 2\vec{l}_2, \\ \vec{a}_2 &= 3\vec{l}_1 - \vec{l}_2 + \vec{l}_3, \\ \vec{a}_3 &= \vec{l}_2 + \vec{l}_3, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу обратную к матрице A

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5.15) получаем, учитывая что $\vec{b} = \vec{l}_1 - 2\vec{l}_2 + 2\vec{l}_3 = (1, -2, 2)$

$$\vec{b}^* = A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}25 \\ 0{,}75 \\ 1{,}25 \end{pmatrix},$$

т.е. $\vec{b} = -1{,}25\vec{a}_1 + 0{,}75\vec{a}_2 + 1{,}25\vec{a}_3 = (-1{,}25,\ 0{,}75,\ 1{,}25)$.

5.4. Евклидово пространство

Линейное пространство, введенное в п. 5.1, существенно отличается от множества векторов обычного трехмерного геометрического пространства тем, что в линейном пространстве не определены понятия длины вектора и угла между векторами. Введем в действительном линейном пространстве *метрику*, т.е. способ измерять длины и углы. Для этого введем понятие *скалярного произведения*, а с его помощью длину и угол.

Определение. *Скалярным произведением двух векторов* $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *называется число*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\,. \qquad (5.16)$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл. Если, например, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть вектор обьема реализации некоторых товаров, а $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ вектор их цен, то $(\vec{x}, \vec{y})$ выражает суммарную стоимость реализованных товаров.

Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ скалярное произведение удовлетворяет следующим условиям:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ – коммутативность;
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{z})$ – дистрибутивность;
3. $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$, для любого $\alpha \in R$;
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, если $\vec{x} \neq \vec{0}$; $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, если $\vec{x} = \vec{0}$.

Определение. *Линейное (векторное) пространство называется евклидовым, если в нем определена операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая четырем указанным свойствам.*

Нормой (длиной) вектора $\vec{x}$ *в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\ \vec{x})} = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}}\,. \tag{5.17}$$

В силу аксиомы 4 длина вектора – действительное неотрицательное число (мы рассматриваем арифметическое значение корня). Длина вектора равна нулю, если вектор нулевой. В силу аксиом 1-4 имеют место следующие свойства длины вектора:

1. $\|\vec{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$, где λ – действительное число;
3. $\|(\vec{x},\ \vec{y})\| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ (неравенство Коши-Буняковского); (5.18)
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (неравенство треугольника). (5.19)

Углом φ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется угол, определяемый равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\ \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}, \tag{5.20}$$

где $0 \le \varphi < \pi$.

Такое определение вполне корректно, так как согласно неравенству Коши-Буняковского $\|(\vec{x},\ \vec{y})\| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, т.е. $\cos\varphi \le 1$.

В линейном пространстве R^3 скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определим так, как в п. 4.2: аксиомы 1-4 для него будут выполнены (см. свойства скалярного произведения и определение скалярного квадрата вектора). Следовательно, линейное пространство R^3 всех свободных векторов с обычным определением скалярного произведения является евклидовым пространством. В этом пространстве норма вектора совпадает с его длиной $\|\vec{x}\| = |\vec{x}|$: это следует из формул $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$ и (5.17). Неравенства (5.18), (5.19) принимают соответственно вид $|(\vec{x},\ \vec{y})| \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$, $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$. Отметим, что неравенство $|(\vec{x},\ \vec{y})| \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ следует из формулы (4.11). Неравенство $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$ следует из определения суммы векторов и длины вектора; оно имеет простой геометрический смысл (в треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны). В этом же пространстве введенное понятие угла (5.20) совпадает с понятием угла, рассматриваемого в векторной алгебре (4.14).

Два вектора евклидового пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору. В пространстве R^3 ортогональность векторов означает их перпендикулярность (см. 4.16).

Из определений следует, что ненулевые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\cos\varphi = 0$ и угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ называется *ортогональной,* если эти векторы попарно ортогональны, т.е.

$$(\vec{x}_i,\ \vec{x}_k) = 0 \text{ при } i \ne k.$$

Если, кроме того,

$$|\vec{x}_i| = 1 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n,$$

то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ называется *ортонормированной.*

Теорема 3. *Ортогональная система ненулевых векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ *линейно независима.*

Д о к а з а т е. л ь с т в о. Для этого построим нулевую линейную комбинацию

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}\,.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на $\vec{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, получим

$$\lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_i) + \lambda_2(\vec{x}_2, \vec{x}_i) + \ldots + \lambda_n(\vec{x}_n, \vec{x}_i) = \vec{0}.$$

Отсюда, учитывая что $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \neq 0$ при $i = j$, получаем что $\lambda_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Значит векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ линейно независимы и образуют *ортонормированный базис.*

Базис n-мерного евклидового пространства называется *ортонормированным*, если базисные векторы образуют ортонормированную систему.

Сформируем (без доказательства) основную теорему.

Теорема 4. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

При $n = 1$ утверждение очевидно. Если $\vec{x}$ – ненулевой вектор, то вектор $\vec{l} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ – ортонормированная система из одного вектора.

Примером ортонормированного базиса в пространстве R^n является система n единичных векторов $\vec{l}_i$, у которых $i-$я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю: $\vec{l}_1 = (1,0,0,...,0)$, $\vec{l}_2 = (0,1,0,...,0)$, $\vec{l}_3 = (0,0,1,...,0), \ldots, \vec{l}_n = (0,0,0,...,1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установить, являются ли векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимыми:
   1.1. $a_1 = (2,-1,3)$, $a_2 = (1,4,-1)$, $a_3 = (0,-9,5)$;
   1.2. $a_1 = (1,2,0)$, $a_2 = (3,-1,1)$, $a_3 = (0,1,1)$;
   1.3. $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1)$, $a_3 = (2,1,2)$;
   1.4. $a_1 = (1,0,1,1)$, $a_2 = (0,1,1,1)$, $a_3 = (-1,0,1,1)$, $a_4 = (1,1,1,1)$;
2. Показать, что векторы $a = (1,2,0)$, $в = (3,-1,1)$, $c = (0,1,1)$ заданные в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ сами образуют базис.
3. Даны векторы $a = l_1 + l_2 + l_3$, $в = 2l_2 + 3l_3$, $c = l_2 + 5l_3$, где $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ - базис линейного пространства. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{l}_1 - \vec{l}_2 + \vec{l}_3$ в базисе $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$.
4. Векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_5$ образуют ортопортированный базис. Найти скалярное произведение и длины векторов $x = l_1 - 2l_2 + l_5$, $y = 3l_2 + l_3 - l_4 + 2l_5$.
5. Докажите, что система векторов линейно зависима:
   а) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (0,0,0,0)$;
   б) $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0)$, $a_3 = (0,0,1)$, $a_4 = (5,6,7)$.
6. Покажите, что следующие системы векторов линейно зависимы, и выясните, является ли вектор $\vec{в}$ линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ *и* $\vec{a}_3$:
   а) $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,2,1)$, $a_3 = (0,1,-1)$, $в = (0,1,0)$;
   б) $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,2,1)$, $a_3 = (1,2,1)$, $в = (0,0,1)$;
   в) $a_1 = (0,0,0,1)$, $a_2 = (0,0,1,2)$, $a_3 = (0,1,3,-5)$, $a_4 = (1,-2,0,0)$, $в = (1,-1,4,-2)$.
7. Найти координаты вектора $a = (1,3,1)$ в базисе $l_1 = (1,0,0), l_2 = (1,1,0)$, $l_3 = (1,1,1)$.

ЛЕКЦИЯ № 6. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Оглавление

6.1. Линия как геометрическое место точек

В XVII в. работами Ферма и Декарта создается аналитическая геометрия, суть которой состоит в последовательном применении алгебры к исследованию различных геометрических образов.

Предположим, что некоторая линия задана как геометрическое место точек, обладающих вполне определенным, общим для всех них свойством.

Аналитическая геометрия указывает один из важнейших путей изучения свойств этой линии. Нужно выбрать некоторую систему координат и по данному свойству геометрического места точек связать уравнением $F(x, y) = 0$ координаты x и y произвольной точки M, принадлежащей линии. При этом точка $M(x, y)$ называется *текущей точкой* линии, а ее координаты – *текущими координатами* линии (рис. 7.1). Убедившись в том, что всякая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, принадлежит данной линии, устанавливаются геометрические свойства линии по ее уравнению. Следовательно, одна из основных задач аналитической геометрии состоит в том, чтобы, зная геометрический закон образования линии, составить ее уравнение.

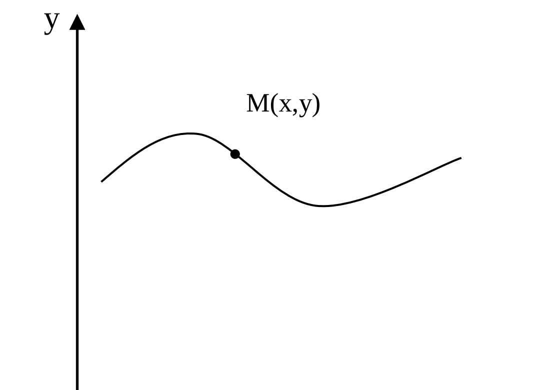


Рис. 7.1

Пример 1. Составить геометрическое место точек, равноудаленных на расстояние R от данной точки $C(x_0, y_0)$. Это геометрическое место точек называется *окружностью*.

Решение. Выберем произвольную прямоугольную систему координат xOy и построим на ней точку $C(x_0, y_0)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую данному геометриче-

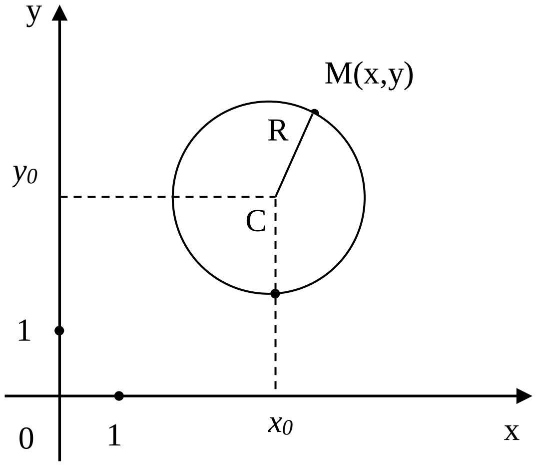


Рис. 7.2

скому месту точек (рис. 7.2). По условию задачи длина $CM = R$. Но с другой стороны, учитывая формулу (4.12) расстояние между двумя точками $CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Следовательно, уравнение искомого г.м.т. имеет вид

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

или $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (7.1)$$

Покажем, что всякая т. М, координаты х и у которой удовлетворяют уравнению (7.1), принадлежит окружности. Так как х и у удовлетворяют уравнению (7.1), то

$$(y - y_0)^2 = R^2 - (x - x_0)^2.$$

Тогда длина отрезка CM^2 запишется

$$CM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + R^2 - (x - x_0)^2 = R^2,$$

т.е. точка $M(x, y)$ принадлежит окружности. Следовательно, уравнение (7.1) есть уравнение окружности с центром в т. $C(x_0, y_0)$ и радиусом R.

Любую линию в принципе можно выразить соответствующим уравнением (хотя на практике это бывает достаточно сложно сделать). Однако не всякое уравнение определяет на плоскости некоторую линию. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет только одну точку (0; 0), а уравнение $x^2 + y^2 + 9 = 0$ не определяет ни одной точки на множестве R, так как левая часть уравнения не обращается там в нуль.

Чтобы убедиться, лежит ли т. $M(x_0, y_0)$ на данной линии $F(x, y) = 0$, надо проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки заданному уравнению, т.е. проверить выполнение равенства $F(x_0, y_0) = 0$.

6.2. Прямая на плоскости

Прямую линию на плоскости относительно системы прямоугольных декартовых координат можно задать различными способами и в результате получить различные виды уравнений прямой.

6.2.1. Уравнение прямой, проходящей через заданную т очку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданному вект ору $\vec{N} = (A, B)$

Рассмотрим на плоскости хОу произвольную прямую L, некоторую точку $M_0(x_0, y_0) \in L$ и вектор $\vec{N} \perp L$, называемый *нормальным вектором прямой*. (рис. 6.3.) Точка M_0 и нормальный вектор $\vec{N}$ вполне определяют положение прямой L на плоскости хОу. Пусть $M(x, y)$ – текущая точка прямой. Построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. По условию задачи $\vec{N} \perp \overrightarrow{M_0M}$, поэтому их скалярное произведение равно нулю $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ или в скалярной форме (см. 4.12)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (6.2)$$

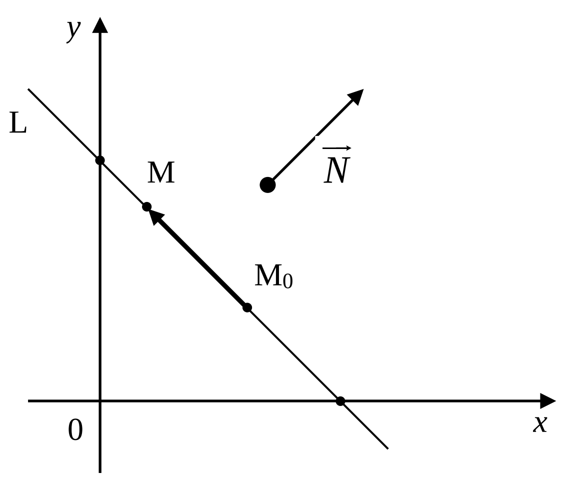


Рис. 7.3

Полученному уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M(x,y)$ прямой L. Уравнение (6.2) называют *уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(1,-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(-3,5)$.

Решение. В этой задаче $A=-3$, $B=5$, $x_0=1$, $y_0=-2$. По формуле (6.2) получаем

$$-3(x-1)+5(y+2)=0,$$

или, раскрыв скобки,

$$3x-5y-13=0.$$

6.2.2. Общее уравнение прямой

Преобразуем уравнение (6.2) раскрывая скобки и группируя

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0.$$

Получаем, обозначив $(-Ax_0-By_0)=C$, уравнение

$$Ax+By+C=0, \tag{6.3}$$

которое называют *общим уравнением прямой*. Для уравнения (6.3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Любая прямая на плоскости определяется в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (6.3), где A, B, C – постоянные. И обратно, если A и B не равны нулю одновременно, то уравнение (6.3) определяет на плоскости некоторую прямую.*

Действительно, в п.6.2.1 установлено, что уравнение любой прямой L, лежащей на плоскости xOy имеет вид (6.2), т.е. является уравнением первой степени относительно текущих координат x и y.

Легко доказать и обратное, что любое уравнение первой степени относительно координат x и y есть уравнение некоторой прямой, лежащей на плоскости xOy.

Пусть в уравнении (6.3) хотя бы один из коэффициентов A или B не равен нулю (т.к. в противном случае мы имели бы не уравнение, тождество $C=0$). Пусть, например, $B\neq 0$. Тогда это уравнение равносильно уравнению

$$A(x-0)+B\left(y+\frac{C}{B}\right)=0.$$

Но последнее уравнение есть уравнение прямой, проходящей через точку $\left(0;-{}^{C}\!/_{B}\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(A,B)$. Следовательно, и (6.3) является уравнением этой прямой. Коэффициенты A и B в уравнении (6.3) равны проекциям на оси координат нормального вектора данной прямой.

Рассмотрим общее уравнение прямой (6.3) в случае, когда некоторые его коэффициенты равны нулю.

1. $C=0$, $Ax+By=0$. Прямая проходит через начало координат, так как точка (0, 0) удовлетворяет этому уравнению.

2. $B=0$, $Ax+C=0$ или $x=-\dfrac{C}{A}$. Для всех точек прямой абсцисса x имеет постоянное значение, равное $-\dfrac{C}{A}$. Прямая расположена параллельно оси Oy на расстоянии $\left|-\dfrac{C}{A}\right|$ от нее.

3. $A=0$, $By+C=0$ или $y=-\dfrac{C}{B}$. Это уравнение определяет прямую, параллельную оси Ox на расстоянии $\left|-\dfrac{C}{B}\right|$ от нее.

4. $C=0$, $B=0$. Уравнение (6.3) принимает вид $Ax=0$, или $x=0$ и определяет прямую, совпадающую с осью Oy.

5. $C=0$, $A=0$. В этом случае уравнение (6.3) принимает вид $By=0$, или $y=0$ и определяет прямую, совпадающую с осью Ox.

Уравнения $x=0$ и $y=0$ являются уравнениями осей Oy и Ox соответственно.

6.2.3. Каноническое уравнение прямой

Рассмотрим на плоскости xOy произвольную прямую L, положение которой вполне определяется заданием какой-либо ее точки $M_0(x_0,y_0)$ и вектора $\vec{a}=(m,n)$, параллельного данной прямой или лежащего на ней. Такой вектор называется *направляющим вектором прямой* L (рис. 6.4). Пусть $M(x,y)$ – текущая точка прямой L. Так как векторы $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ и $\vec{a}=(m,n)$ коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны (4.15), т.е.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (6.4)$$

Полученному уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M(x,y)$ прямой L. Оно называется *каноническим уравнением прямой*.

Обозначив в уравнении (6.4) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=t$, получим $(t\in R)$

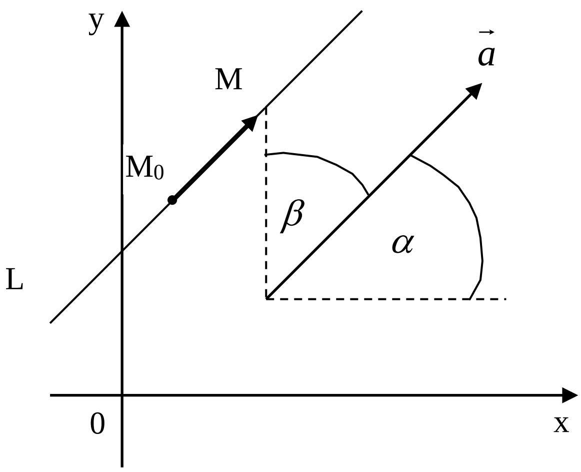


Рис. 7.4

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=t\\[2mm] \dfrac{y-y_0}{n}=t\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=mt+x_0\\ y=nt+y_0\end{cases} \qquad (6.4)^*$$

Уравнения (6.4)* называют *параметрическими уравнениями прямой*.

З а м е ч а н и е. Если прямая L, проходящая через т. $M_0(x_0,y_0)$, параллельна оси Oy, то ее уравнение имеет вид $x=x_0$. Ее направляющий вектор $\vec{a}$ тоже параллелен этой оси, и, следовательно, его проекция m на ось Ox равна нулю. Однако и в этом случае условились формально записывать уравнение прямой в каноническом виде:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Аналогично, каноническое уравнение прямой, параллельной оси Ox, записывается:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0}.$$

6.2.4. Уравнение прямой, проходящей через данную т очку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении

Если в уравнении (6.4) в качестве вектора $\vec{a}$ взять некоторый единичный вектор $\vec{e}$, то его координатами будут направляющие косинусы этого вектора, т.е. $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Тогда из (6.4) следует

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} \quad \text{или} \quad y - y_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_0).$$

Обозначив $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = k$, получаем уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{6.5}$$

которое называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом* k.

Множество всех прямых на плоскости, проходящих через некоторую точку M_o (x_o, y_o) этой плоскости, называется *пучком прямых*, а точка M_o – *центром* пучка. Уравнение пучка тоже имеет вид (6.5), но угловой коэффициент k принимает всевозможные численные значения. Тогда каждому численному значению k будет соответствовать прямая, проходящая через точку M_o.

Полагая в формуле (6.5) $x_o = 0$, $y_0 = b$, получим $y - b = kx$ или

$$y = kx + b \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, а ордината b – *отрезком, отсекаемым прямой на оси Оу* (рис. 6.5).

Если прямая, не перпендикулярная оси Ох, задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то разрешая это уравнение относительно у, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{6.7}$$

Здесь $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

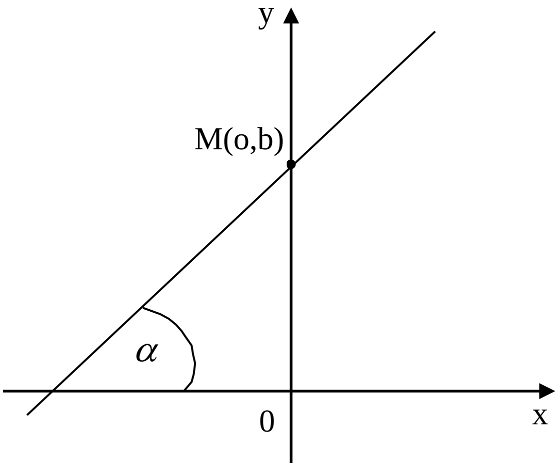


Рис. 7.5

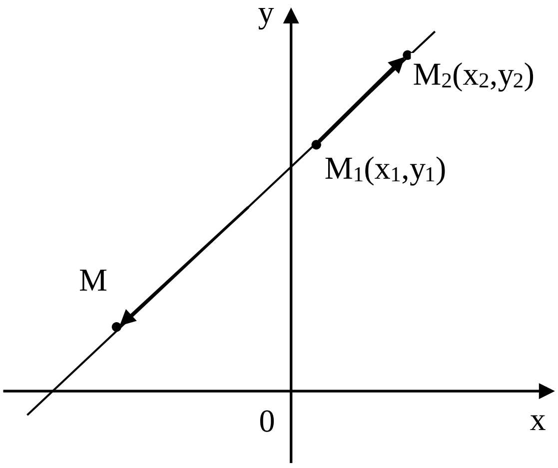


Рис. 7.6

6.2.5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные т очки

Составим каноническое уравнение прямой (6.4), выбрав в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и точку $M_1(x_1, y_1)$. Тогда получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6.8}$$

Уравнение (6.8) называют *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*.

6.2.6. Уравнение прямой в от резках

Найдем уравнение прямой по заданным отрезкам $a \neq 0$ и $b \neq 0$, которые отсекает прямая соответственно на оси Ох и Оу. Так как эта прямая проходит через две точки $M_1(a,0)$ и $M_2(0,b)$ (рис. 6.7), то используя уравнения прямой, проходящей через две заданные точки (6.8), имеем

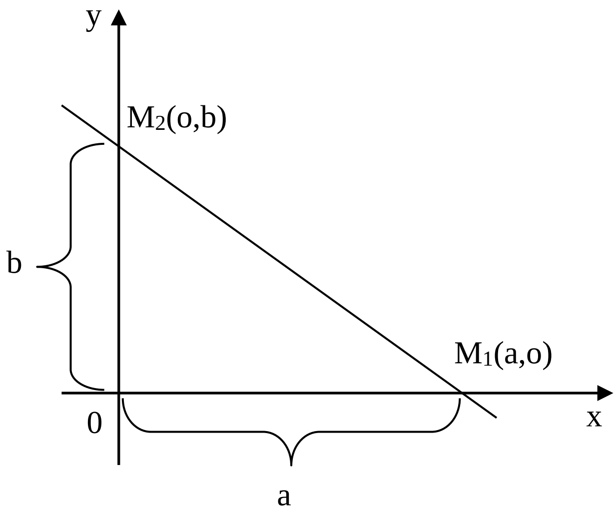


Рис. 7.7

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \qquad \text{или}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) называется *уравнением прямой в отрезках*.

Если прямая задана общим уравнением (6.3), не проходит через начало координат или параллельно координатным осям, то это уравнение можно привести к виду (6.9)

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Положив в последнем уравнении $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{B}{C} = b$ получим уравнение в отрезках (6.9).

6.2.7. Нормальное уравнение прямой

Предположим, что в уравнении прямой (6.3)

$$A_0 x + B_0 y + C_0 = 0 \tag{6.10}$$

имеем $A_0^2 + B_0^2 = 1$. Тогда длина нормального вектора прямой $\left|\overrightarrow{N_0}\right| = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1$. В этом случае уравнение (6.10) называют *нормальным уравнением прямой*.

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ (6.3) можно привести к нормальному виду, умножив его левую часть на $\frac{1}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, так как в этом случае нормальный вектор прямой нормируется (становится единичным вектором по направлению совпадающим с вектором $\vec{N}$), и $\vec{N_0} = \frac{1}{|\vec{N}|}\vec{N}$. Величина

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

называется *нормирующим множителем*. При этом уравнение принимает вид

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (6.11)$$

и является нормальным уравнением прямой.

6.3. Задачи на прямую на плоскости

Задача 1. Найти точку пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

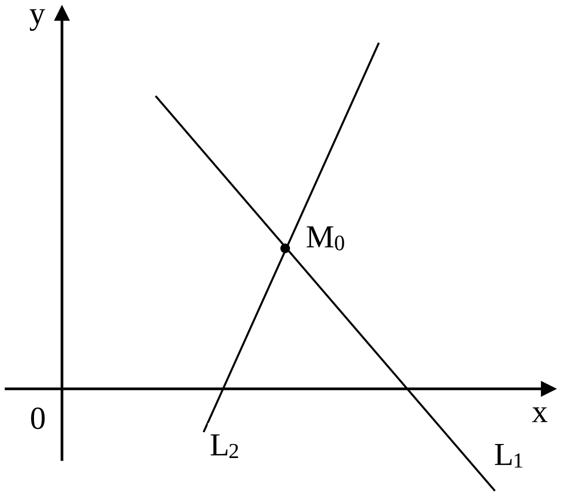


Рис. 7.8

Решение. Так как искомая точка пересечения M_0 принадлежит каждой из двух заданных прямых, то ее координаты должны удовлетворять как уравнению первой прямой, так и уравнению второй прямой.

Таким образом, для того чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 3. Найти точку пересечения прямых $3x - 2y + 10 = 0$ и $x + y + 5 = 0$.

Решение. Координаты искомой точки пересечения найдем, решив систему уравнений (6.12):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 10 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}.$$

Точка пересечения M_0 имеет координаты $x = -4$, $y = -1$.

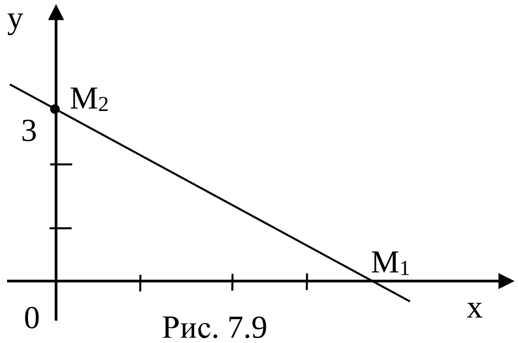


Рис. 7.9

Задача 2. Построить прямую по ее заданному уравнению.

Решение. Для построения прямой достаточно знать две ее точки. Чтобы построить каждую из этих точек, мы задаемся произвольным (удобным для вычисления) значением одной из ее координат, а затем из уравнения находим соответствующее значение другой координаты.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ оба коэффициента при текущих координатах не равны нулю ($A \neq 0$ и $B \neq 0$), то для построения этой прямой лучше всего находить точки ее пересечения с осями координат.

Пример 4. Построить прямую $3x + 4y - 12 = 0$.

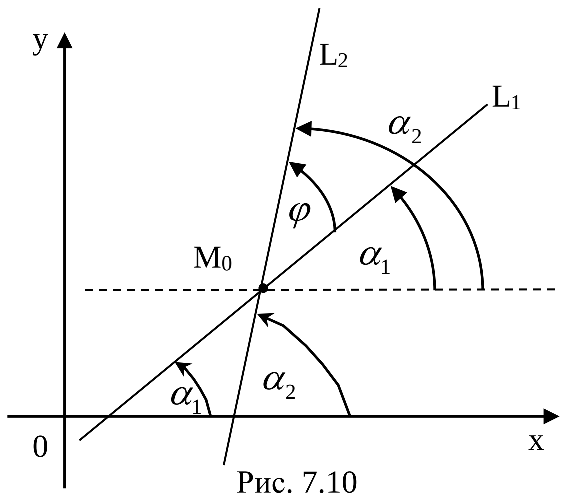


Рис. 7.10

Решение. Находим точку M_1 пересечения заданной прямой с осью Ох. (рис 6.9.) Учитывая, что уравнение оси Ох $y = 0$, для нахождения точки пересечения решаем систему

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ и т. } M_1(4,0).$$

Аналогично находим координаты точки M_2 пересечения прямой с осью O_y, учитывая что уравнение оси ординат x=0:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ и т. } M_2(0,3).$$

Строим прямую по двум ее точкам M_1 и M_2.

Задача 3. Вычислить угол между двумя пересекающимися прямыми L_1 и L_2 заданными соответственно уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ (рис. 6.10).

Решение. Найдем тангенс угла φ между этими прямыми. При этом мы будем предполагать, что данные прямые не перпендикулярны друг другу, так как иначе $tg\varphi$ не существовал бы. Пусть прямая L_1 образует с положительным направлением оси Ох угол α_1, а прямая L_2 – угол α_2. Проведем через т. M_0 пересечения прямых L_1 и L_2 прямую, параллельную оси Ох. Из рис.6.10 видим, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, причем $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$ – угловые коэффициенты прямых. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

Окончательно имеем

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \qquad .(6.12)$$

При этом предполагается, что угол φ отсчитывается в направлении от прямой L_1 к прямой L_2.

Пример 5. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x + 3y + 15 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$.

Решение. Вычисляем угловые коэффициенты заданных прямых, учитывая формулы (6.7) $k = -\frac{A}{B}$: $k_1 = -\frac{5}{3}$; $k_2 = -\frac{1}{4}$. Тогда по формуле (6.12) находим

$$tg\varphi = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{3}}{1 + \left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 4. Установить условия параллельности и перпендикулярности двух прямых L_1 и L_2.

Решение. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то угол φ в формуле (6.12) равен 0 и $tg\varphi = 0$. Тогда из формулы (6.12) следует что

$$k_1 = k_2. \qquad (6.13)$$

И наоборот, если $k_1 = k_2$, то по формуле (6.12) $tg\varphi = 0$ и $\varphi = 0$. Таким образом, *равенство (6.13) является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых*.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ и формула (6.12) теряет смысл. В этом случае лучше рассматривать котангенс угла между прямыми

$$ctg\varphi = ctg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{1}{tg\varphi}=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0,$$

откуда $1+k_1k_2=0$ или

$$k_1k_2=-1. \qquad (6.14)$$

Справедливо и обратное утверждение, если выполняется условие (6.14), то прямые L_1 и L_2 перпендикулярны. Таким образом, формула (6.14) выражает *необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых.*

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угол между ними будет равен углу между их нормальными векторами $\overrightarrow{N_1}=(A_1,B_1)$ и $\overrightarrow{N_2}=(A_2,B_2)$. Тогда угол между прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (6.15)$$

Если прямые параллельны, то $\overrightarrow{N_1}\parallel\overrightarrow{N_2}$ и

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \qquad (6.16)$$

Если прямые перпендикулярны, то $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0$, или

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (6.17)$$

Пример 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4,-5)$ параллельно (перпендикулярно) прямой $3x+4y+12=0$.

Решение. Запишем уравнения искомых прямых, используя уравнение прямой (6.5), проходящей через заданную точку $M_0(4,-5)$ с заданным угловым коэффициентом. Для написания уравнения параллельной прямой используем условие (6.13)

$$k=k_1=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}.$$

Подставляя в (6.5), находим

$$y-y_0=k(x-x_0)\Rightarrow y+5=-\frac{3}{4}(x-4)\Rightarrow 3x+4y+8=0.$$

В случае перпендикулярной прямой используем условие (6.14) и уравнение (6.5) $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{4}{3}$. Тогда

$$y+5=\frac{4}{3}(x-4)\Rightarrow 4x-3y-31=0.$$

Таким образом, уравнение параллельной прямой $3x+4y+8=0$ и перпендикулярной прямой $4x-3y-31=0$ найдены.

Задача 5. Найти расстояние d от точки

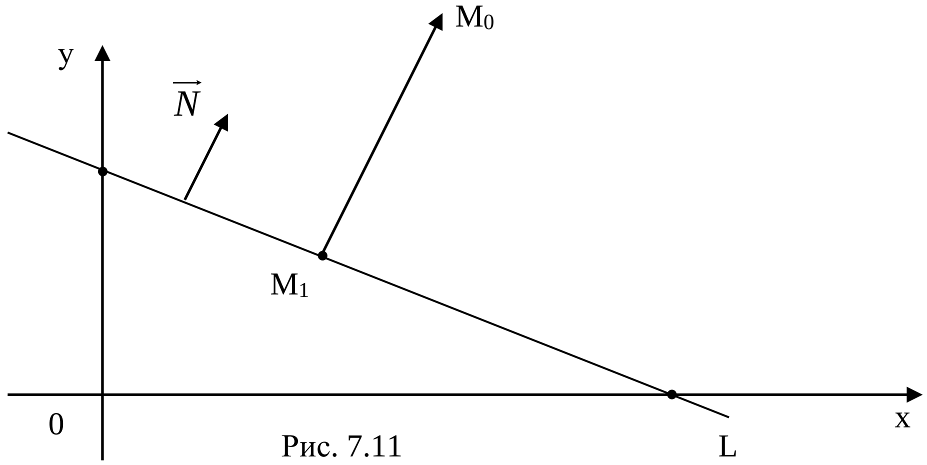


Рис. 7.11

$M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (L).

Решение. Под расстоянием от точки M_0 до прямой L понимают длину перпендикуляра $M_0M_1 = d$ опущенного от точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямую L (рис 6.11).

Пусть точка M_1 основания перпендикуляра имеет координаты $M_1(x_1, y_1)$, тогда $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ и нормальный вектор прямой L $\vec{N} = (A, B)$. Тогда по определению скалярного произведения $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot \left|\vec{N}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между перемножаемыми векторами и так как векторы коллинеарны, то $\varphi = 0$ (или π), поэтому $\cos\varphi = \pm 1$. Тогда

$$\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2}\,. \tag{6.18}$$

С другой стороны, скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов записывается:

$$\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B = Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1$$

Но так как точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на данной прямой L, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой: $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Отсюда $-Ax_1 - By_1 = C$. Учитывая это, получаем

$$\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = Ax_0 + By_0 + C\,. \tag{6.19}$$

Сравнивая формулы (6.18) и (6.19), получаем

$$\pm d\sqrt{A^2 + B^2} = Ax_0 + By_0 + C\,,$$

откуда

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,, \text{ или}$$

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{6.20}$$

Пример 6. Дан треугольник с вершинами $A(2,-1)$, $B(6,-4)$, $C(10,3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки C (рис. 6.12).

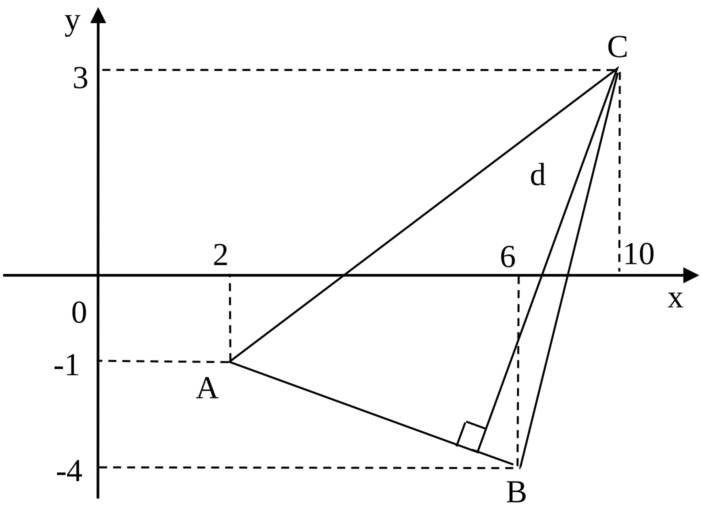


Рис. 7.12

Решение. Задача сводится к вычислению расстояния d от точки C до прямой AB. Запишем уравнение этой прямой, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (6.8) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Подставляя координаты точек A и B, получаем $\frac{x-2}{6-2} = \frac{y+1}{-4+1}$ или $3x + 4y - 2 = 0$. Расстояние d от точки $C(10,3)$ до прямой AB, которая имеет уравнение $3x + 4y - 2 = 0$ вычислим по формуле (6.20)

$$d = \frac{\left|3\cdot 10 + 4\cdot 3 - 2\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 8\,.$$

Следовательно, длина высоты равна 8.

Пример 8. Даны уравнения двух сторон параллелограмма L_1 $x+2y+2=0$ и L_2 $x+y-4=0$ и уравнение одной из диагоналей L_3 $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма (рис. 6.13).

Решение. Строим все прямые, заданные в условии задачи.

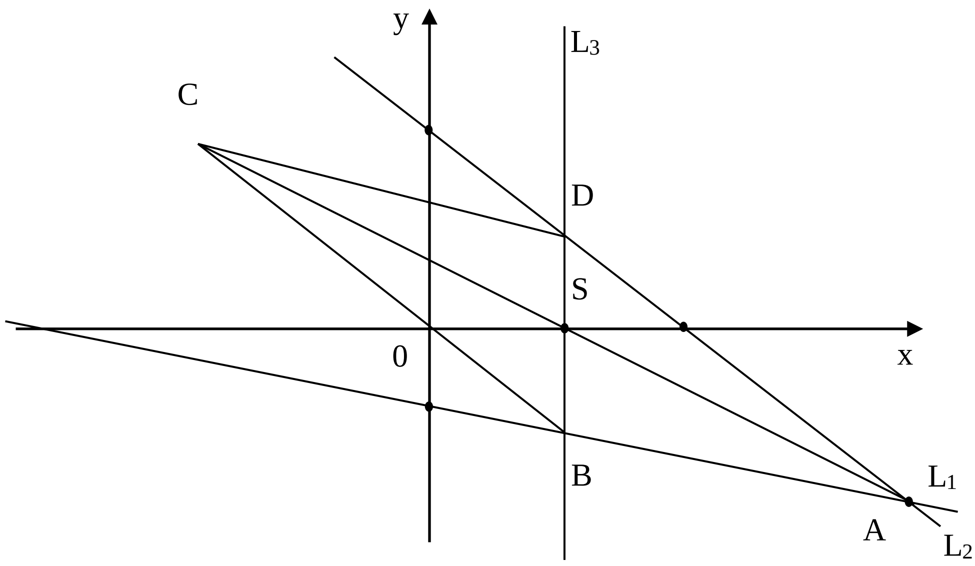


Рис.7.13

Находим координаты одной вершины параллелограмма, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=10 \\ y=-6 \end{cases},$$

т.е. т. $A(10,-6)$. Две другие вершины B и D найдем как точки пересечения заданной диагонали с соответствующими сторонами, т.е. решив системы

$$\begin{cases} x+2y+2=0, \\ x-2=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y-4=0, \\ x-2=0. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-2 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases}$$

$$B(2,-2) \qquad\qquad D(2,2).$$

Середина диагонали BD находится в точке $S(2,0)$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то четвертая вершина $C(x,y)$ может быть найдена как конец отрезка AC по известному концу $A(10,-6)$ и середине $S(2,0)$: $x_3=\dfrac{x_A+x_C}{2}$, $y_3=\dfrac{y_A+y_C}{2}$ $\Rightarrow$ $x_C=2x_S-x_A=2\cdot2-10=-6$, $y_C=2y_S-y_A=2\cdot0+6=6$, т.е. $C(-6,6)$. Таким образом, координаты всех вершин параллелограмма найдены: $A(10,-6)$, $B(2,-2)$, $D(2,2)$, $C(-6,6)$.

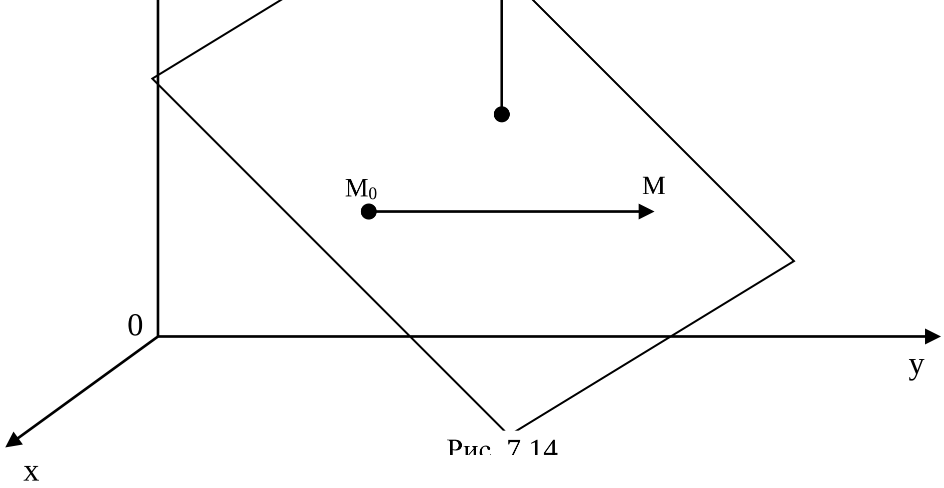


Рис. 7.14

6.4. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве

Пусть некоторая плоскость P проходит через точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C)$, который называют *нормальным вектором* этой плоскости (рис. 6.14).

Этими условиями определяется единственная плоскость в пространстве Oxyz. Возьмем на плоскости P текущую точку $M(x, y, z)$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, который по построению будет перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N} = (A, B, C)$. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е. $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Последнее равенство в координатной форме имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (6.21)$$

Уравнение (6.21) называют *уравнением плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с заданным нормальным вектором* $\vec{N} = (A, B, C)$.

Раскрыв скобки в уравнении (6.21) и обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (6.22)$$

Можно доказать, что любое линейное уравнение с тремя переменными есть уравнение плоскости и наоборот.

Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат. Другие частные случаи определяются расположением нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$. Так, например, если A=0, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox; если $A = D = 0$, то уравнение $By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox; если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости Oxy; если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость Oxy.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяются условиями коллинеарности и перпендикулярности их нормальных векторов $\vec{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность коэффициентов при одноименных координатах

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (6.23)$$

а условием их перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (6.24)$$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (6.25)$$

Уравнение прямой в виде (6.25) называют *общим уравнением прямой в пространстве*.

Если прямая L проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно некоторому

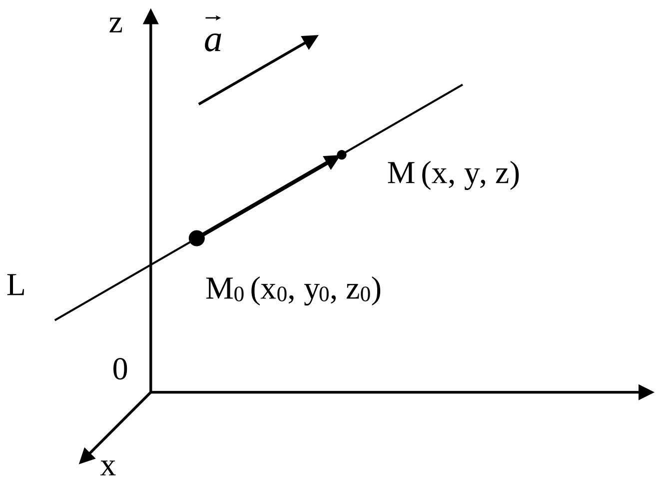


Рис 7.15

вектору $\vec{a}$ (рис 6.15), который называется *направляющим вектором* прямой, то ее *каноническое уравнение* может быть получено из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\vec{a} = (m, n, p)$ (здесь $M(x, y, z)$ – текущая точка прямой):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (6.26)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Оу и точки $F(4,0)$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$: а) параллельно оси Ох; б) параллельно оси Оу; в) и составляющей с осью угол 45^0.
3. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: а) $A(3,1)$ и $B(5,4)$; б) $A(3,1)$ и $C(3,5)$; в) $A(3,1)$ и $D(-4,1)$.
4. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.
5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y = x + 1$.
6. Найти длину и уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3,0)$, $B(2,5)$, $C(3,2)$.
7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.
8. Дан треугольник с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,4)$ и $C(4,0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.
9. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $3x + 2y - 12 = 0$, высоты BM $x + 2y - 4 = 0$, высоты AM $4x + y - 6 = 0$, где M – точка пересечения высот. Найти уравнения сторон AC, BC и высоты CM.
10. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $x - 5y + 6 = 0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух сторон параллелограмма и его диагоналей.
11. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.
12. Даны уравнения сторон треугольника $3x - 4y + 24 = 0$ (AB), $4x + 3y + 32 = 0$ (BC), $2x - y - 4 = 0$ (AC). Составить уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины B, и найти их длины.

ЛЕКЦИЯ 7. ФУНКЦИЯ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Оглавление

7.1 Понятие множества. Модуль действительного числа.

Понятие множества принадлежит к основным понятиям математики, не определяемым через более простые понятия. Под *множеством* понимается совокупность некоторых объектов, обладающих определенным свойством. Объекты, образующие множество, называются *элементами* или *точками* этого множества. Например: 1) множество дней в году; 2) множество точек на плоскости; 3) множество студентов в аудитории и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными. Если a есть элемент множества A, то записывают $a \in A$ и в противном случае $a \notin A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 4 = 0$.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется *подмножеством* множества A и обозначается $B \subset A$. Например, если A – множество всех студентов, сидящих в аудитории, а B – множество студентов определенной группы, сидящих в той же аудитории, то B есть подмножество множества A, т.е. $B \subset A$.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. В школьном курсе математики использовались: множество натуральных чисел, обозначение N, $\{1, 2, 3, 4, ..., 135, ...\}$; множество целых чисел $\{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 263, ...\}$, обозначение – Z; множество рациональных чисел – числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$, обозначение – Q; иррациональные числа – бесконечные непериодические десятичные дроби, обозначение I (или $\overline{Q}$); действительные числа – объединение множеств рациональных и иррациональных чисел, обозначение – R. При этом $N \subset Z \subset Q \subset R, I \subset R$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, обозначение $A \cup B = C$. Например, $Q \cup I = R$.

Пересечением множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, обозначение $A \cap B = D$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, обозначение $A \setminus B = E$. Графические изображения

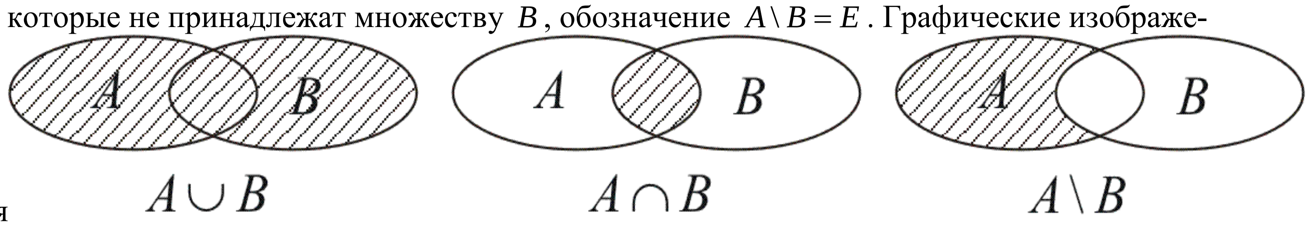


Рис. 7.1

Пример 1. Дано: $A = \{2; 4; 7; 9\}, B = \{3; 5; 7; 9\}$. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Решение. Согласно данным определениям
$A \cup B = \{2;3;4;5;7;9\}$, $A \cap B = \{7;9\}$, $A \setminus B = \{2;4\}$.

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой* (или числовой оси), т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

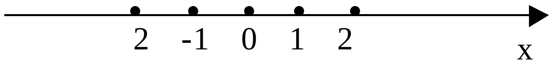


Рис. 7.2

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует определенная точка на числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой – определенное действительное число.
Множество X, элементы которого удовлетворяют неравенству:

1) $a \le x \le b$, называется *отрезком* и обозначается $[a,b]$;

2) $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается (a,b);

3) $a \le x < b$ и $a < x \le b$ называются *полуинтервалами* и обозначаются соответственно $[a,b)$ и $(a,b]$. Аналогично вводятся и бесконечные интервалы $(-\infty;a)$, $(b;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$, и полуинтервалы $(-\infty;a]$ и $[b;+\infty)$. Все указанные выше множества объединяются термином *промежуток* X.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $(-x)$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \ge 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что по определению $|x| \ge 0$.

Перечислим свойства абсолютных величин:

$$|x+y| \le |x| + |y|, \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$|x-y| \ge |x| - |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

С геометрической точки зрения $|x-a|$ означает расстояние между точками x и a на числовой прямой. Например, решением неравенства $|x-a| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ будут точки x интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенству $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

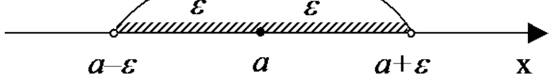


Рис. 7.3

Всякий интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью точки* a. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, т.е. множество точек x таких, что $|x-a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется *$\varepsilon-$окрестностью точки* a.

Под *проколотой окрестностью точки* x_0 будем понимать любой интервал, окружающий эту точку, из которого удалена сама точка x_0 и обозначать U_{x_0}, т.е. $U_{x_0} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$, если $a < b$ и $a < x_0 < b$.

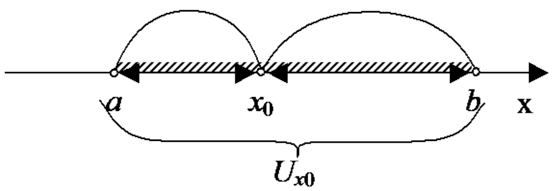


Рис. 7.4

Под *окрестностью* U_∞ понимается внешность любого отрезка $\left[a,b\right]$, т.е. $U_\infty=\left(-\infty;a\right)\cup\left(b;+\infty\right)$.

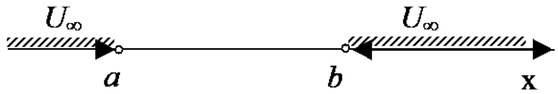


Рис. 7.5

Замечание. В дальнейшем для сокращения и формализации записей будем использовать логические символы $\forall$ («для любого») и $\exists$ («существует», «найдется»).

7.2 Функция. Основные понятия. Классификация функций. Построение графиков функций элементарными методами

Под *величиной* в математике понимается все то, что может быть измерено; при этом физическая сущность величины опускается.

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Например, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, равная числу π.

Параметром называется величина, сохраняющая постоянное значение лишь в условиях данного процесса.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения в условиях рассматриваемого процесса. Например, при равномерном движении $S=vt$, где S и время t – переменные величины, а v – параметр.

Определение. Пусть даны два множества X и Y. Если каждому элементу $x\in X$ ставится в соответствие вполне определенный (единственный) элемент $y\in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция $y=f\left(x\right)$.

При этом x называется *независимой переменной* (аргументом), y – *зависимой переменной,* а буква f обозначает аналитический закон соответствия. Множество X называется *областью определения* (или существования) функции, а множество Y – *областью значений* функции.

Мы будем рассматривать частный случай понятия функции, а именно такие функции, областями определения, а также множествами значений которых являются некоторые подмножества множества действительных чисел.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции понимается область допустимых значений независимой переменной x, т.е. множество таких значений x, при которых функция $y=f\left(x\right)$ вообще имеет смысл.

Например, функция $y=x^2-\sqrt{x-3}$ имеет область определения полуинтервал $\left[3;+\infty\right)$, так как $x-3\geq 0$, а множество значений $y\in\left[9;+\infty\right)$.

Существует несколько способов задания функции: а) *аналитический* (формулой $y=f\left(x\right)$); б) *табличный* – функция задается таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения $y=f\left(x\right)$; в) *графический* – состоит в изображении графика функции $y=f\left(x\right)$, которым устанавливается соответствие между значениями аргумента x (абсциссами графика) и ординатами – соответствующими им значениями функции $y = f(x)$; г) *словесный* – функция описывается правилом ее составления.

Напомним основные свойства функций, их виды и классификацию, построение графиков элементарными методами.

1. *Четность и нечетность*. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$ и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется функцией *общего вида*.

Например, функция $y = 3x^2$ является четной (так как $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$), а функция $y = 2x^3$ – нечетная (так как $f(-x) = 2(-x)^3 = -2x^3 = -f(x)$). В то же время, например, функция $y = 3x^2 + 2x^3$ является функцией общего вида, так как $f(-x) = 3(-x)^2 + 2(-x)^3 = 3x^2 - 2x^3$ и $f(-x) \neq f(x)$, и $f(-x) \neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см., например, график функции $y = x^2$ на рис. 7.6), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см., например, график функции $y = x^3$ на рис. 7.5).

2. *Монотонность*. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е., если $\forall x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$, и если $f(x_2) > f(x_1)$, то функция возрастающая на X, и если $f(x_2) < f(x_1)$, то убывающая на X. Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными* функциями.

Например, функция $y = 3x^2$ возрастающая при $x \in [0; +\infty)$ и убывающая при $x \in (-\infty; 0]$.

3. *Ограниченность*. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$.

Например, функция $y = \cos x$ ограничена на всей числовой прямой, т.к. $|\cos x| \leq 1 \ \forall x \in R$.

4. *Периодическая функция*. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения $f(x+T) = f(x)$.

Например, функция $y = \cos x$ – периодическая функция с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$, т.к. $\cos(x + 2\pi) = \cos x \ \forall x \in R$.

5. *Неявная функция*. Функция называется *явной*, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

Функция y аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной y. Например, функция y заданная уравнением $x^2 + y^3 - 4x = 0$ является неявно заданной функцией.

6. *Обратная функция*. Пусть $y = f(x)$ есть функция от независимой переменной x, отображающая промежуток (множество) X на промежуток Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ *единственное* значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на промежутке Y с областью значений X, называется *обратной* для функции $y = f(x)$. Иными словами, обратная функция (обозначение $y = \varphi(x)$ или $y = f^{-1}(x)$) является отображением множества Y на множество X. Например, для функции $y = 2^x$ обратной будет функция $x = \log_2 y$ или в обычных обозначениях (функцию принято обозначать y, а аргумент –

x) $y=\log_2 x$. Так как в прямой (строго монотонной) и обратной функциях области определения и множество значений меняются ролями, то их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Можно показать, что для любой строго монотонной функции существует обратная ей функция.

7. *Сложная функция*. Пусть функция $y=f(u)$ есть функция от переменной u на множестве U с областью значений X, а переменная u в свою очередь является функцией $u=\varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y=f\left[\varphi(x)\right]$ называется *сложной функцией* (или суперпозицией функций, или функцией от функции).

Например, $y=\ln\cos 2x$ – сложная функция, так как ее можно представить в виде $y=\ln u$, где $u=\cos 2x$.

8. *Элементарные функции*. К *основным элементарным* функциям относятся: степенная функция, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. В таблице 1 приводятся наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

Определение. Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются элементарными.

Например, функция $y=\dfrac{3\sqrt{x}+\sin 2x}{2^{3x}-1}$ является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции конечно.

Неэлементарной функцией является функция $y=|x|$.

7. *Классификация функций*. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий («+», «–», умножения, деления, возведение в степень и извлечение корня). К числу алгебраических функций относятся:

– целая рациональная функция (многочлен или полином)

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n;$$

– *дробно-рациональная функция* – отношение двух многочленов;

– *иррациональная функция* (если в составе операций над аргументом имеется операция извлечения корня).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*. К числу трансцендентных функций относятся: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

.

Таблица 1

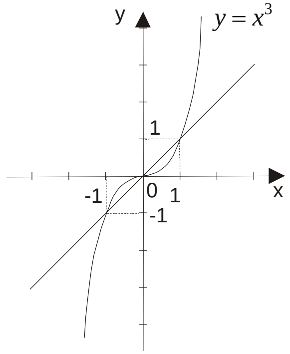
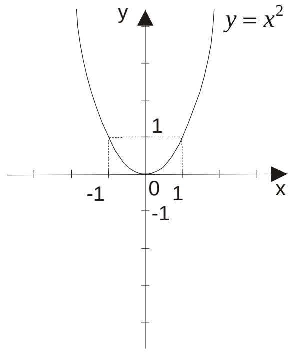
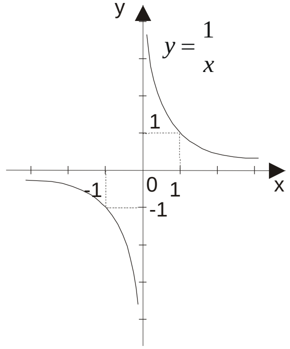
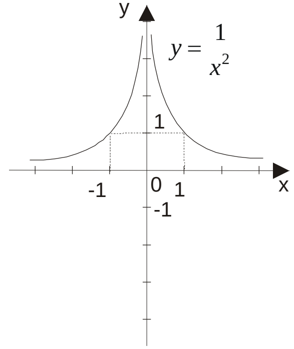
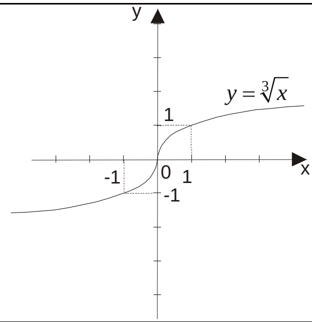
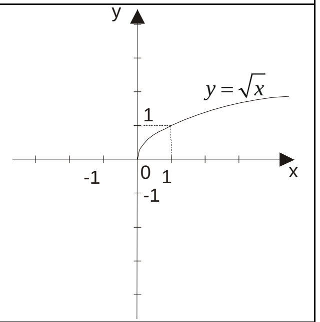
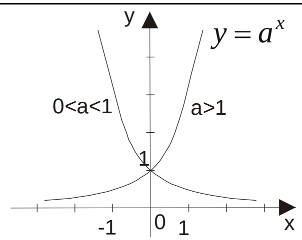
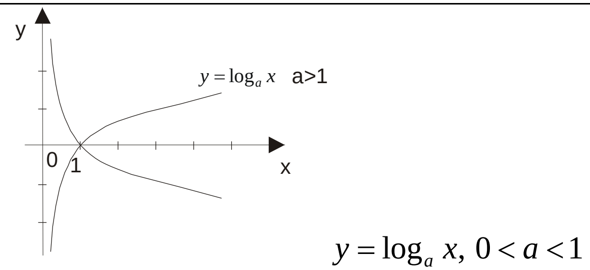
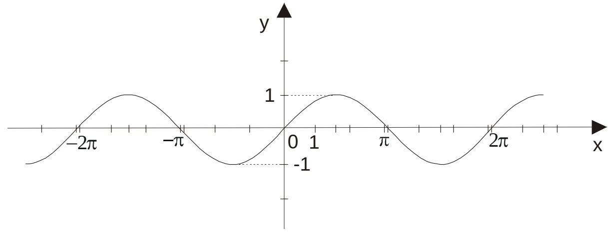
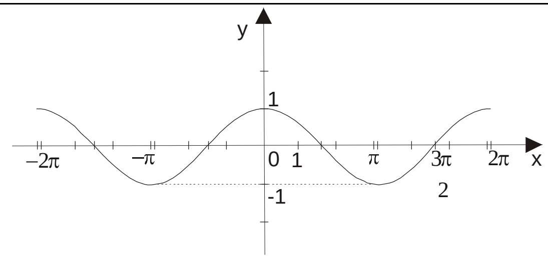
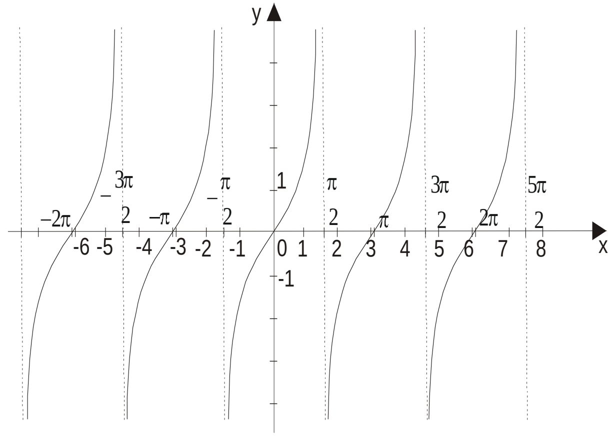
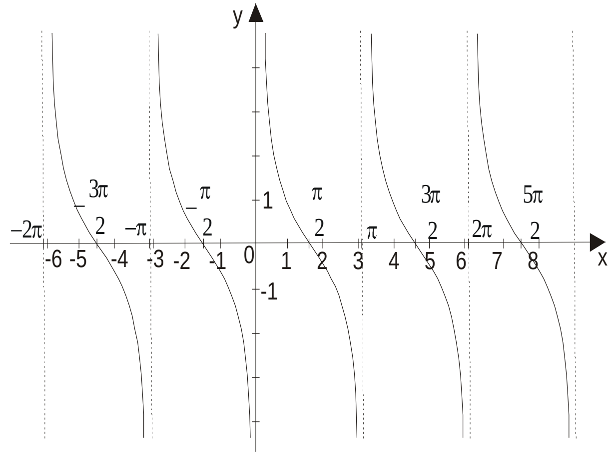
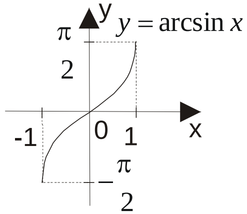
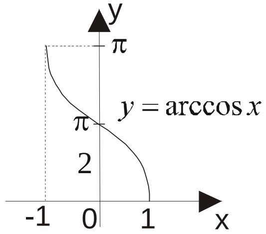
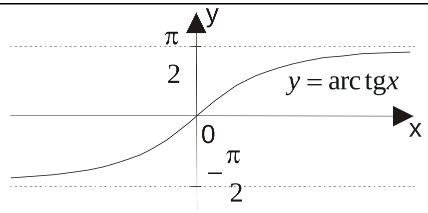
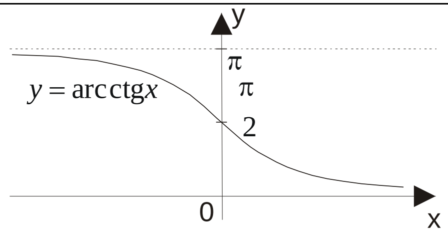
№ п/п	Обозначение функции	Область определения X	Область значений Y	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7	8
			1. Степенная функция				
1	$y = x^n$ $n \in N$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно, $[0, \infty)$, если n –четно	нечетная, если n – нечетно; четная, если n – четно	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n –нечетно; убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $(0, \infty)$, если n – четно	непериодическая	 Рис.7.5  Рис.7.6
2	$y = x^n$ $n \in N$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n –четно	нечетная, если n – нечетно; четная, если n – четно	убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \infty)$, если n –нечетно; возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, \infty)$, если n –четно	непериодическая	 Рис.7.7  Рис.7.8
3	$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$ $n > 1$	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	нечетная, если n – нечетно; общего вида, если n – четно	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n –нечетно; возрастает на $[0, \infty)$, если n –четно	непериодическая	 

							Рис.7.9 Рис.7.10
2. Показательная функция							
4	$y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \infty)$	общего вида	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(-\infty, \infty)$, если $0 < a < 1$;	непериодическая	 Рис.7.11
3. Логарифмическая функция							
5	$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, +\infty)$	общего вида	возрастает на $(0, \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(0, \infty)$, если $0 < a < 1$;	непериодическая	 Рис. 7.12
4. Тригонометрические функции							
6	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	нечетная	возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$; убывает на $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in N$	наименьший положительный период $T = 2\pi$	 Рис. 7.13
7	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	четная	возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$; убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in N$	наименьший положительный период $T = 2\pi$	 Рис. 7.14

8	$y = tgx$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\right.$ $\left.\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ $n \in Z$	$(-\infty,+\infty)$	нечетная	возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$	наименьший положительный период $T = \pi$	 Рис. 7.15
9	$y = ctgx$	$(\pi n, \pi +$ $+\pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty,+\infty)$	нечетная	убывает на $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in Z$	наименьший положительный период $T = \pi$	 Рис. 7.16

5. Обратные тригонометрические функции

10	$y =$ $= \arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	Нечетная	возрастает на $[-1,1]$	непериодическая	 Рис. 7.17
11	$y =$ $= \arccos x$	$[-1,1]$	$[0;\pi]$	Общего вида	убывает на $[-1,1]$	непериодическая	 Рис. 7.18
12	$y = arctgx$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	Нечетная	возрастает на $(-\infty,+\infty)$	непериодическая	 Рис. 7.19
13	$y =$ $= arcctgx$	$(-\infty,+\infty)$	$(0;\pi)$	Общего вида	убывает на $(-\infty,+\infty)$	непериодическая	 Рис. 7.20

10. *Преобразование графиков*. Используя приведенные ниже приемы построения графиков с помощью преобразования графиков основных элементарных функций (см. табл. 1), можно в некоторых случаях строить графики функций.

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. График функции $y = f(x+a)$ есть график функции $y = f(x)$, сдвинутый (при $a > 0$ влево, при $a < 0$ вправо) на $|a|$ единиц параллельно оси Ox (см. рис. 7.23).

2. График функции $y = f(x)+b$ есть график функции $y = f(x)$, сдвинутый (при $b > 0$ вверх, при $b < 0$ вниз) на $|b|$ единиц параллельно оси Oy (см. рис. 7.23).

3. График функции $y = mf(x)(m \neq 0)$ есть график функции $y = f(x)$, растянутый (при $m > 1$) в m раз или сжатый (при $0 < m < 1$) вдоль оси Oy (см. рис. 7.24). При $m < 0$ график функции $y = mf(x)$ есть зеркальное отображение графика $y = -mf(x)$ относительно оси Ox.

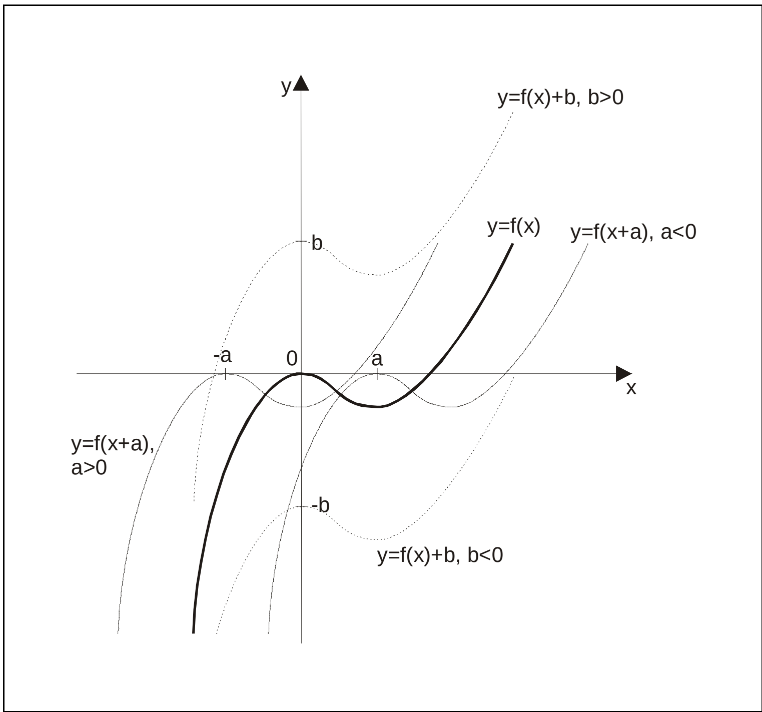


Рис. 7.23

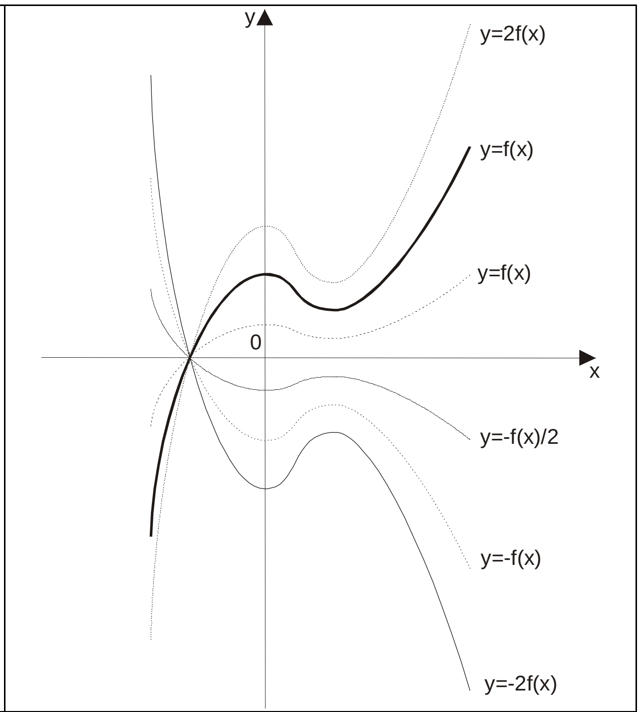


Рис. 7.24

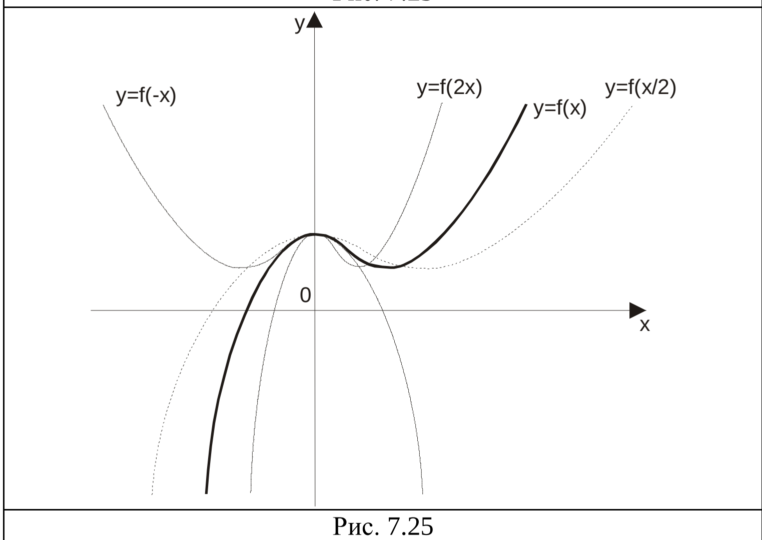


Рис. 7.25

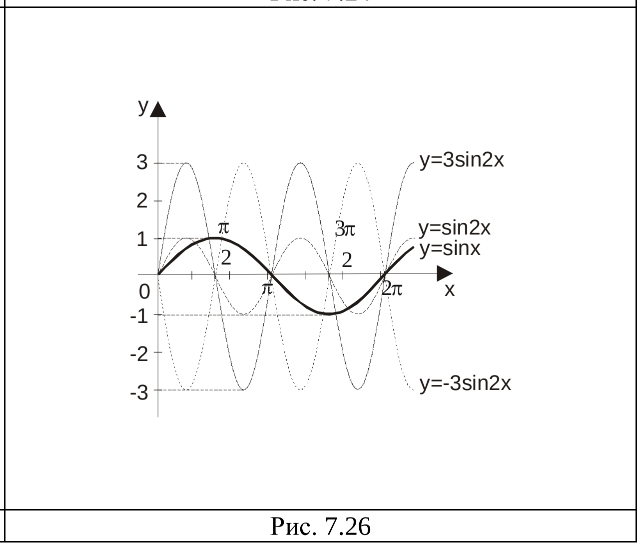


Рис. 7.26

4. График функции $y = f(kx)(k \neq 0)$ есть график функции $y = f(x)$, сжатый (при $k > 1$) в k раз или растянутый (при $0 < k < 1$) вдоль оси Ox (см. рис. 7.25). При $k < 0$ график функции $y = f(kx)$ есть зеркальное отображение графика $y = f(-kx)$ относительно оси Oy.

Пример 2. Построить график функции $y = -3\sin 2x$.

Решение. 1) Строим график функции $y = \sin x$ (см. рис. 7.13).

2) Строим график функции $y = \sin 2x$ сжатием графика $y = \sin x$ в 2 раза вдоль оси Ox (рис. 7.25).

3) Строим график функции $y = 3\sin 2x$, растягивая график $y = \sin 2x$ в 3 раза вдоль оси Oy (рис. 7.26).

4) Строим график функции $y = -3\sin 2x$, зеркально отображая график функции $y = 3\sin 2x$ относительно оси Ox (см. рис. 7.26).

7.3. Применение функций в экономике и управлении

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике управления. Спектр используемых функций весьма широк. Наиболее часто используются следующие функции:

1. *Функция полезности* (функция предпочтений) – зависимость результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.
2. *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.
3. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции.
4. *Функции спроса, потребления и предложения* – зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.)

Например, пусть y – спрос на товар, x – цена товара. Зависимость между спросом и ценой, т.е. функция спроса, выражается формулой $y = f(x)$. Функция спроса может иметь различный вид, например, $y = \dfrac{500}{x+8}$ или $y = 4e^{-2x}$ и т.д.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти область определения функций:

1) $y = \sqrt{x} - \ln(4x-5)$. 2) $y = \log_2 \cos x + \sqrt{9-x^2}$.

3) $y = \arcsin\dfrac{6x}{x^2+9}$. 4) $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$.

5) $y = \arccos\left(2x^2 + x\right)$. 6) $y = \sqrt{2x} - \lg(2x+3)$.

2. Найти область значений функций:

1) $y = 2\sin x + \cos x$. 2) $y = \dfrac{4x}{2+x^2}$.

3) $y = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$. 4) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

5) $y = 2\sqrt{1-x}$. 6) $y = 3\sqrt{1-x^2}$.

3. Установить четность (нечетность) функций:

1) $y=3x-ctg^3 2x$. 2) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$.

3) $y=(x-1)^2\sin^2 x$. 4) $y=x^3\sin 2x$.

5) $y=2x-x^3+5x^5$. 6) $y=3x^2-\sin x$.

7) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$. 8) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}$.

4. Построить графики функций:

1) $y=-2(x+3)^2+1$. 2) $y=\dfrac{3}{x-1}-2$.

3) $y=\dfrac{4x-3}{x-1}$. 4) $y=\log_2(3-2x)^2$.

5) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. 6) $y=\sin x+\cos x$.

7) $y=\sin^2 x+1$. 8) $y=3\sin(2x+8)$.

ЛЕКЦИЯ 8. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Оглавление

8.1. Предел числовой последовательности

Определение. Функция, областью определения которой является множество N, а множеством значений R называется числовой последовательностью. Сокращенно последовательность

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \qquad (8.1)$$

обозначается $\{x_n\}$, числа $x_1, x_2, x_3, ...$ называются членами последовательности (8.1), число n - номером члена последовательности, x_n - общим членом последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ считается заданной, если задан n-й член последовательности, т.е. задана функция $f(n) = x_n$.

Примеры числовых последовательностей:

1) $\{n^2\}$ или 1, 4, 9, 16, 25,…, n^2,… (монотонная, неограниченная);

2) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ или $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ...$ (монотонная, ограниченная);

3) $\left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\right\}$ или 0, 1, 0, 1, …, $\frac{(-1)^n+1}{2}$, … (немонотонная, ограниченная).

Геометрически последовательность $\{x_n\}$ изображается на числовой прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности. На рис.8.1 изображены соответственно последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

Следует отметить, что у рассмотренных на рис.8.1 последовательностей члены последовательностей с ростом n группируются возле 0 как угодно близко к нему приближаясь, т.е. абсолютная величина разности $|x_n - 0|$ будет меньше любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0 \left(|x_n - 0| < \varepsilon\right)$.

Определение. *Число* A *называется* ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$ *(обозначение* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$*), если для любого сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$*, найдется такой номер* N *последовательности* N*, зависящий от* $\varepsilon \left(N(\varepsilon)\right)$*, начиная с которого для всех членов последовательности с номерами* $n > N$ *выполняется неравенство*

$$|x_n - A| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся* последовательностью, не имеющая предела – *расходящейся.*

Предел числовой последовательности имеет *геометрическое истолкование*. Неравенство (8.2) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - A < \varepsilon \text{, или } A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

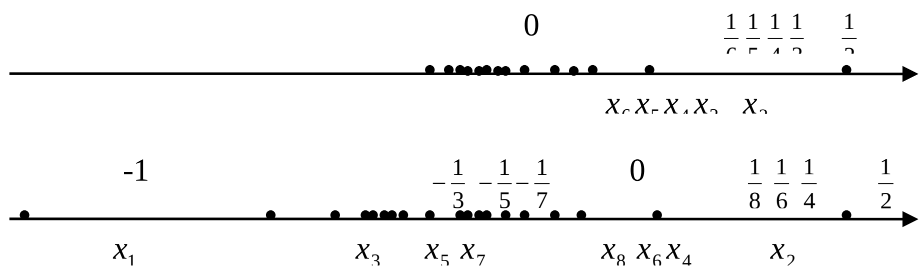


Рис.8.1

которые означают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки A (рис.8.2).

Поэтому определение предела можно сформулировать следующим образом: число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности точки A существует номер N такой, что все элементы x_n с номерами $n > N$ находятся в этой ε-окрестности , а вне нее остается лишь конечное число членов.

Пример 1. Используя определение предела, показать что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Так как $\left|x_n-2\right|=\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|=\frac{2}{n+1}$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих неравенству $\left|x_n-2\right|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{2}{n+1}<\varepsilon$. Получаем $\frac{2}{\varepsilon}<n+1\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}-1=\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$. Следовательно, за N можно взять целую часть числа $\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$, т.е. $N=\left[\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|x_n-2\right|<\varepsilon$ будет выполняться при всех $n>N$. Так как ε - любое, то доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$.

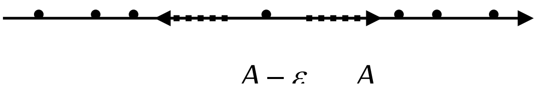


Рис8

Полагая, например, $\varepsilon=\frac{1}{10}$, получаем номер члена последовательности N, начиная с которого справедливо неравенство $\left|x_n-2\right|<\frac{1}{10}$, т.е. $N=\left[\frac{2-\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}}\right]$=19. Аналогично полагая $\varepsilon=0{,}01$, получаем $N=\left[\frac{2-0{,}01}{0{,}01}\right]=199$ и т.д.

Так как последовательность $\{x_n\}$ является функцией натурального аргумента $\left(x_n=f(n), n\in N\right)$, то для нее имеют место аналогично функции понятия возрастающей, убывающей, монотонной, и ограниченной последовательности (см. примеры 1), 2), 3)).

При исследовании на монотонность конкретных последовательностей чаще всего выясняют знак разности $x_{n+1}-x_n$ или (для положительных последовательностей) сравнивают с единицей отношение x_{n+1}/x_n.

Пример 2. Исследовать на монотонность последовательность $\left\{\frac{n}{5^n}\right\}$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{5^{n+1}}\div\frac{n}{5^n}=\frac{(n+1)5^n}{5^n\cdot5\cdot n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1+\frac{1}{n}}{5}\le\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}<1$$

для любого $n\in N$. Следовательно, $x_n>x_{n+1}$ и последовательность монотонно убывающая.

Отметим, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны: неубывающие последовательности – снизу ($x_n \ge x_1$ для всех n), невозрастающие – сверху ($x_n \le x_1$ для всех n). Оказывается, что если монотонная последовательность ограничена с обеих сторон, то она сходится. Немонотонные последовательности этим свойством не обладают.

Сформулируем (без доказательства) основную теорему о монотонных последовательностях *(признак существования предела последовательности).*

Теорема 1. *Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

8.2. Предел функции в бесконечности и в точке

С понятием предела числовой последовательности $\{x_n\}$ тесно связано понятие предела функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$). Если в первом случае переменная n, возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная x, изменяясь, принимает любые значения. При этом удобно использовать понятие окрестности U_∞.

Определение. *Число A называется* ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** x, ***стремящимся к бесконечности****, если для любого сколь угодно малого положительного*

числа $\varepsilon > 0$, найдется такая проколотая окрестность U_∞, что для всех $x \in U_\infty$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (8.3)$$

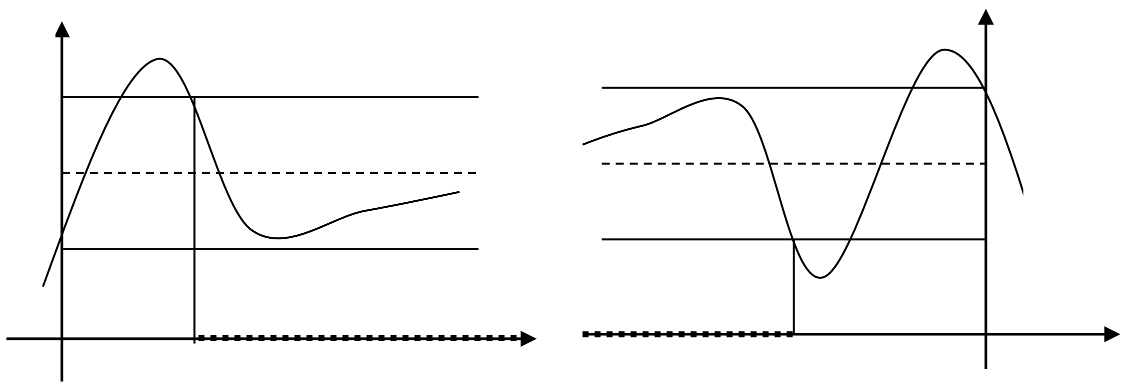


Рис 8.3

Обозначение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Смысл определения остается тем же, что и для предела числовой последовательности: при достаточно больших по модулю значениях x значения функции $f(x)$ как угодно мало отличается от числа A (по абсолютной величине).

Геометрический смысл определения: при $x \to +\infty \, (x \to -\infty)$ ординаты графика функции $y = f(x)$ будут заключены в полосе $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была (см. рис.8.3), если $x \in (b, +\infty)$ ($x \in (-\infty, a)$).

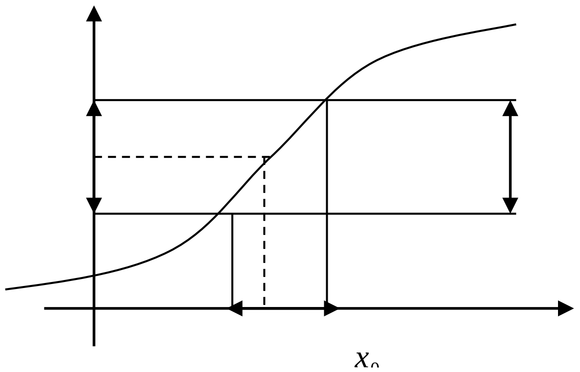


Рис.8.4

Определение. *Число* A *называется* **пределом функции** $y = f(x)$ **при** x, **стремящимся к** x_0**,** *если для любого сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$, *найдется такая проколотая окрестность точки* x_0 U_{x_0}, *что для всех* $x \in U_{x_0}$ *справедливо неравенство*

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (8.4)$$

Этот предел обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Смысл определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что для всех значений x достаточно близких к x_0, значения функции $f(x)$ как угодно мало отличается от числа A (по абсолютной величине).

Геометрический смысл предела функции в точке: число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой построенной ε-окрестности точки A существует проколотая окрестность точки x_0 ($U_{x_0} = (a, b)$) такая, что как только $x \in U_{x_0}$, то соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в интервале $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и убедимся в том, что при x близких к $x_0 = 2$, разность между функцией и числом 3 по абсолютной величине может быть сделана меньше ε, т.е. $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$. Построим U_2, разрешив последнее неравенство относительно x. Это неравенство равносильно двойному неравенству

$$(-\varepsilon < (2x - 1) - 3 < \varepsilon) \Leftrightarrow (4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon) \Leftrightarrow \left(2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

т.е. $x \in \left(2-\frac{\varepsilon}{2};2+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если из последнего интервала выбросить точку $x_0 = 2$, то получим U_2. Итак, для всех $x \in U_{x_2} = \left(2-\frac{\varepsilon}{2};2\right) \cup \left(2;2+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ справедливо неравенство $\left|(2x-1)-3\right| < \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

Полагая в частности $\varepsilon = 0{,}1$, находим $U_2 = (1{,}95;2) \cup (2;2{,}05)$.

В дальнейшем будем использовать понятие *односторонних пределов функции*, которые вводятся аналогично.

Если при $x \to x_0$ переменная x принимает лишь значение меньше x_0, ($x \in U_{x_0 -} = (a, x_0), a < x_0$), то говорят о *левостороннем пределе функции* и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$.

Если же при $x \to x_0$ переменная x принимает лишь значение больше x_0, ($x \in U_{x_0 +} = (x_0, b), b > x_0$), то говорят о *правостороннем пределе функции* при $x \to x_0$ и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A$.

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливается следующим утверждением.

Теорема 2. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существует как правый так и левый пределы и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.*

8.3. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение. *Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой при** $x \to x_0$**, (или при** $x \to \infty$**),** если ее предел равен нулю* т.е.

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0 \tag{8.5}$$

Зная определение предела функции при $x \to x_0$ и при $x \to \infty$, можно дать развернутое определение бесконечно малой функции:

*Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой при** $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая проколотая окрестность точки x_0, U_{x_0}, что для всех $x \in U_{x_0}$ справедливо неравенство*

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \qquad .(8.6)$$

Аналогично формулируется определение бесконечно малой при $x \to \infty$, только роль U_{x_0} играет U_∞.

Например, функции $y = \sin 3x$ при $x \to 0$ и $y = \dfrac{2}{4x-3}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малые, ибо их пределы равны нулю.

Установим связь между бесконечно малыми функциями и пределами функций.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) предел, равный A, то ее можно представить виде суммы этого числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ ($x \to \infty$)*, т.е.

$$f(x) = A + \alpha(x). \qquad (8.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему для случая $x \to x_0$. По условию теоремы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Из определения предела функции при $x \to x_0$ следует, что для $\forall \varepsilon > 0$ существует U_{x_0} такая что, как только $x \in U_{x_0}$, то справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или, если обозначить $\alpha(x) = f(x) - A$, получаем $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Из этого следует (см. (8.6)), что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$ и таким образом $f(x) = A + \alpha(x)$ т.е. имеет место (8.7). Теорема доказана.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 4. *Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то число A есть предел функции при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Тогда $\alpha(x) = f(x) - A$ и $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$ если только $x \in U_{x_0}$. А это и означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые свойства бесконечно малых функций.

Теорема 5. *Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), а $\varphi(x)$ - ограниченная функция при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то:*

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$);

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$);

3) $\alpha(x)\cdot\varphi(x)$ *и* $\beta(x)\cdot\varphi(x)$ - *бесконечно малые функции при* $x\to x_0$ *(* $x\to\infty$ *);*

4) $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ *и* $\dfrac{\beta(x)}{\varphi(x)}$ - *бесконечно малые функции при* $\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$ *(* $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x)\neq 0$ *).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве примера докажем свойство 1), т.е. покажем, что функция $(\alpha(x)+\beta(x))$ тоже является бесконечно малой при $x\to x_0$.

Так как $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to x_0$, то для любого $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдутся такие проколотые окрестности U'_{x_0} и U''_{x_0}, что как только $x\in U'_{x_0}$, то $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $x\in U''_{x_0}$, то $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Если взять в качестве $U_{x_0}=U'_{x_0}\cap U''_{x_0}$, то для всех $x\in U_{x_0}$ будут одновременно выполнятся два последних неравенства, а это значит, что

$$|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Последнее и означает, что функция $\alpha(x)+\beta(x)$ есть величина бесконечно малая.

Остальные утверждения докажите самостоятельно.

Замечание. Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ и в зависимости от результата определяют:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \alpha(x)\ \textit{называется б.м.ф. более высокого порядка малости по}\\ & \textit{сравнению с}\ \beta(x),\ \textit{обозначают}\ \alpha(x)=o(\beta(x));\\ A, & (A\neq 0, A\neq 1)\ \alpha(x)\ \textit{и}\ \beta(x)\ \textit{называют б.м.ф. одного порядка}\\ & \textit{малости};\\ 1, & \alpha(x)\ \textit{и}\ \beta(x)\ \textit{называют эквивалентными б.м.ф.; обозначают}\\ & \alpha(x)\sim\beta(x);\\ \infty, & \alpha(x)\ \textit{называют б.м.ф. более низкого порядка малости по}\\ & \textit{по сравнению с}\ \beta(x).\end{cases}\quad\sim$$

Эквивалентные бесконечно малые функции эффективно используются при вычислении пределов функций в результате чего во многих случаях упрощается вычисление предела. Теорема, обосновывающая это применение, кратко формулируется так: *предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций..*

Однако, при использовании этой теоремы предполагается наличие некоторого известного набора эквивалентных бесконечно малых при $x\to x_0$. В качестве примера приведем следующую таблицу эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$:

1. $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

2. $tgx\sim x$ при $x\to 0$.

3. $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.

4. $arctgx \sim x$ при $x \to 0$.

5. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

6. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

7. $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

8. $a^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

9. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ при $x \to 0$.

10. $(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \to 0$.

8.4. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$***,*** *если для любого сколь угодно большого положительного числа* $M > 0$*, найдется такая* U_{x_0} *(проколотая окрестность точки* x_0*), что как только* $x \in U_{x_0}$*, будет выполнятся равенство*

$$|f(x)| > M .$$

Запись того, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, следующая: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Например, функции $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}, \ldots$ - бесконечно большие при $x \to 0$; функции $\ln x, \frac{1}{\sin x}, ctgx$ - бесконечно большие при $x \to 0$, а функция $y = tgx$ - бесконечно большая при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Аналогично можно дать определение ***бесконечно большой функции при*** $x \to \infty$, если вместо U_{x_0} взять U_∞.

Отметим следующие свойства бесконечно больших функций:

1. *Произведение бесконечно большой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть функция бесконечно большая.*

2. *Сумма бесконечно большой и ограниченной функции есть бесконечно большая функция.*

3. *Частное от деления бесконечно большой величины на функцию,*

имеющую предел в точке x_0, есть величина бесконечно большая.

Например, функция $f(x)=\ln x$ есть бесконечно большая при $x\to 0$, а $\varphi(x)=\sqrt{6x+5}$ при $x\to 0$ имеет предел равный $\sqrt{5}$, отличный от нуля. Тогда (по свойству 1) произведение $f(x)\cdot\varphi(x)=\sqrt{6x+5}\cdot\ln x$ есть бесконечно большая функция при $x\to 0$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями устанавливается следующей теоремой.

Теорема 6. *Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$ ($x\to\infty$), то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x\to x_0$ ($x\to\infty$). И обратно, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x\to x_0$ ($x\to\infty$), то функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$ ($x\to\infty$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение для случая $x\to x_0$. Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется проколотая окрестность U_{x_0} такая, что для $x\in U_{x_0}$ справедливо неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ или $|f(x)|>M$, где $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ и $M=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot A$ это и означает, что при $x\to x_0$ функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой.

Доказательство второго утверждения провести самостоятельно.

Например, если функции $y=\sin 2x$ при $x\to 0$ и $y=\dfrac{4}{2x+5}$ при $x\to\infty$ есть бесконечно малые функции, то функции $y=\dfrac{1}{\sin x}$ при $x\to 0$ и $y=\dfrac{2x+5}{4}$ при $x\to\infty$ есть функции бесконечно большие.

ЛЕКЦИЯ 9. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Оглавление

9.1. Основные теоремы о пределах

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, для которых существуют пределы при $x \to x_0$ (или при $x \to \infty$) и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$. Рассмотрим основные теоремы о пределах.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то он единственный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. пусть при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет два предела A и D, причем $A \neq D$. Тогда согласно теоремы 3 предыдущей лекции ее можно представить в виде (см.10.7) при $x \to x_0$:

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ и } f(x) = D + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Вычитая почленно эти равенства, получим

$$0 = A - D + (\alpha(x) - \beta(x)), \text{ откуда } \alpha(x) - \beta(x) = D - A.$$

Последнее равенство невозможно, так как на основании свойства 1 бесконечно малых функций $\alpha(x) - \beta(x)$ есть бесконечно малая функция. Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = B$, *тогда*

1. $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x).$

3. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, *если* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$.

4. Если $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, *то предел сложной функции* $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.

5. Если в U_{x_0} *(или* U_∞*)* $f(x)<g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем в качестве примера утверждение 1 при $x\to x_0$. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют предел при $x\to x_0$, то согласно теоремы 3 предыдущей лекции в некоторой U_{x_0} их можно представить в виде $f(x)=A+\alpha(x)$, $\varphi(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Складывая (вычитая) почленно эти равенства, получаем

$$f(x)\pm\varphi(x)=(A\pm B)+\left(\alpha(x)\pm\beta(x)\right). \tag{9.1}$$

Так как $A\pm B$ число, $\alpha(x)\pm\beta(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то согласно теореме 4 предыдущей лекции функция $f(x)\pm\varphi(x)$ при $x\to x_0$ имеет предел равный $A\pm B$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=A\pm B=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Утверждение доказано.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+4x-5\right)$.

Решение. На основании теоремы 2 (предел суммы и произведения) имеем

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+4x-5\right)=\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}4x-\lim_{x\to 2}5=3\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+4\lim_{x\to 2}x-5=$$

$=3\cdot 2^2+4\cdot 2-5=12+8-5=15$, так как $\lim\limits_{x\to 2}x=2$.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x+1}$.

Решение. Вычислим предел числителя и знаменателя в отдельности

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+3x+1\right)=\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2+3\lim_{x\to 1}x+1=1+3\cdot 1+1=5,$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2+\lim_{x\to 1}x+1=1+1+1=3.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то применяя теорему 2 (предел частного), получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+1}{x^2+x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)}=\frac{5}{3}.$$

Замечание 1. В утверждениях 1, 2, 3 теоремы 2 предполагается существование пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из чего следуют заключения о значениях пределов суммы, произведения или частного функций. Но необходимо учитывать, что обратные утверждения неверны, т.е. из существования пределов суммы, произведения или частного функций еще не следует, что существуют пределы самих слагаемых, множителей или делимого и делителя.

Например, $\lim\limits_{x\to\pi}\left(tg\,\frac{3}{2}x\cdot ctg\,\frac{3}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\pi}1=1$, но $\lim\limits_{x\to\pi}tg\,\frac{3}{2}x$ не существует.

Замечание 2. Из утверждения 2 теоремы 2 следует при $\varphi(x)=c, c=const$.

$\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\left(cf(x)\right)=c\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)$ и

$\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\left(f(x)\right)^k=\left(\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)\right)^k$, если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)$ существует.

На предыдущей лекции теоремой 1 установлен вопрос о существовании предела последовательности. Рассмотрим один из признаков существования предела функции, который будет использован в дальнейшем.

Теорема 3. *Если в U_{x_0} (или U_∞) функция $g(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x)\le g(x)\le h(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}h(x)=A$, то функция $g(x)$ имеет тот же предел A, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}g(x)=A$.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}h(x)=A$, то из определения предела функции следует, что для $\forall\varepsilon>0$ найдется $U_{x_0(\infty)}$ такая, что $\forall x\in U_{x_0(\infty)}$ будут выполнятся неравенства

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{и} \quad |h(x)-A|<\varepsilon$$

или
$$-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon \quad \text{и} \quad -\varepsilon<h(x)-A<\varepsilon$$

или
$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \quad \text{и} \quad A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \qquad (9.2)$$

Так как по условию $f(x)\le g(x)\le h(x)$,

То из неравенств (2) следует, что

$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon$ при $x\in U_{x_0(\infty)}$ т.е. $|g(x)-A|<\varepsilon$.

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$. Теорема доказана.

9.2. Замечательные пределы

Теорема 4. *(первый замечательный предел). Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к длине этой дуги, выраженной в радианах, равен единице, т.е.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{9.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства рассмотрим единичную окружность с центром в точке 0 (рис. 1). Пусть OB - подвижный радиус, образующий угол в x радиан ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) с осью ОХ, $|OB| = |OA| = 1$. Очевидно, что

$$S_{\Delta AOB} < S_{сектAOB} < S_{\Delta AOC}$$

или $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$ или $\sin x < x < tgx$.

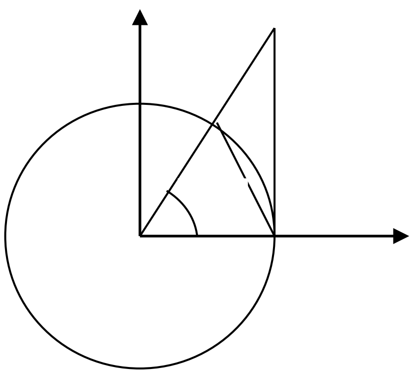


Рис.9.1

Разделив последнее неравенство на $\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Переходя к обратным неравенствам, получаем $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Так как при $x \to 0$ $\cos x \to 1$, то имеет место оценка при $x \to 0$ $1 < \frac{\sin x}{x} < 1$. На основании теоремы 3 (признака существования предела) делаем вывод, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$.

Решение. Знаменатель дроби при $x \to 0$ стремится к нулю. Поэтому теорема 2.3 здесь неприменима. Для нахождения предела используем первый замечательный предел (9.3) в виде

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1, \tag{9.3'}$$

преобразуем подпредельную дробь и используем замечание 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{5}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4}{5}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$;

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\cdot 1=1.$

Рассмотрим числовую последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где $n\in N$.

Если вычислить значения членов последовательности при различных значениях n, то получим следующую таблицу

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,441	2,488	2,594	2,705	2,717	2,718

значений из которой следует, что последовательность *возрастающая* и, наверное, имеет предел близкий к числу 2,718. Докажем, что это действительно так.

Воспользуемся формулой *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n \qquad (9.4)$$

в которой $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k$ и называют *факториалом* (читается «ка факториал»). Полагая в формуле (9.4) $a=1,\ b=\frac{1}{n}$, получим

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}+\ldots$$

или

$$x_n=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\ldots \qquad (9.5)$$

При $n>1$ все слагаемые в формуле (9.5) положительны, причем с возрастанием показателя n увеличивается число слагаемых и каждая соответствующая сумма становится больше. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$, начиная с наименьшего значения, равного 2, растет вместе с показателем n, т.е. является *возрастающей.*

Вместе с тем, последовательность $\{x_n\}$ является *ограниченной*. Очевидно, что каждое слагаемое в правой части формулы (9.5) увеличится, если все множители знаменателей заменить на двойки, а каждую из скобок заменить единицей. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

В силу известной формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ имеем

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Отсюда оценка $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 2+1=3$, т.е. последовательность ограничена.

Согласно признаку существования предела последовательности (теорема 1 предыдущей лекции) монотонная и ограниченная последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Определение. *Вторым замечательным пределом (числом e) называется предел числовой последовательности*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{9.6}$$

Число e является иррациональным числом, приближенное значение которого равно $e\approx 2{,}7182818284$.

Можно доказать, что функция $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ при $x\to\infty$ стремится к числу e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{9.7}$$

Дадим другое выражение для числа e, полагая $\dfrac{1}{x}=\alpha$, $(\alpha>-1)$, $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$. Получим

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \qquad (9.8)$$

При вычислении пределов, второй замечательный предел используют в формах

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e \text{ или } \lim_{u(x)\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e \qquad (9.8')$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$.

Решение. Положим $x=5t$. Тогда при $x\to\infty$ имеем $t\to\infty$. Следовательно

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{5}=e^{5}.$$

Число e *(число Эйлера, неперово число)* играет важную роль в математическом анализе, с его помощью удобно вычислять многие пределы. График функции $y=e^{x}$ называется *экспонентой*. Широко используются логарифмы по основанию e, которые называют *натуральными* ($\ln x=\log_e x$).

9.3. Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

Определение. *Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$); 2) имеет конечный предел при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (9.9)$$

Таким образом, из определения следует, что функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, имеет в точке x_0 предел слева и предел справа, причем оба эти предела одинаковы и равны значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \qquad (9.10)$$

Если эти условия не выполняются, то функцию $f(x)$ называют *разрывной в точке* x_0, а саму точку x_0 называют *точкой разрыва* функции.

Пример 6. Исследовать непрерывность в точке $x=0$ заданных функций:

а) $y=\dfrac{2}{x}$; б) $y=\begin{cases}2x+1 \text{ } при \text{ } x\ge 0,\\ 2x-1 \text{ } при \text{ } x<0;\end{cases}$ в) $y=\begin{cases}-x^2 \text{ } при \text{ } x\ge 0,\\ 2 \text{ } при \text{ } x<0;\end{cases}$ г) $y=x^2$.

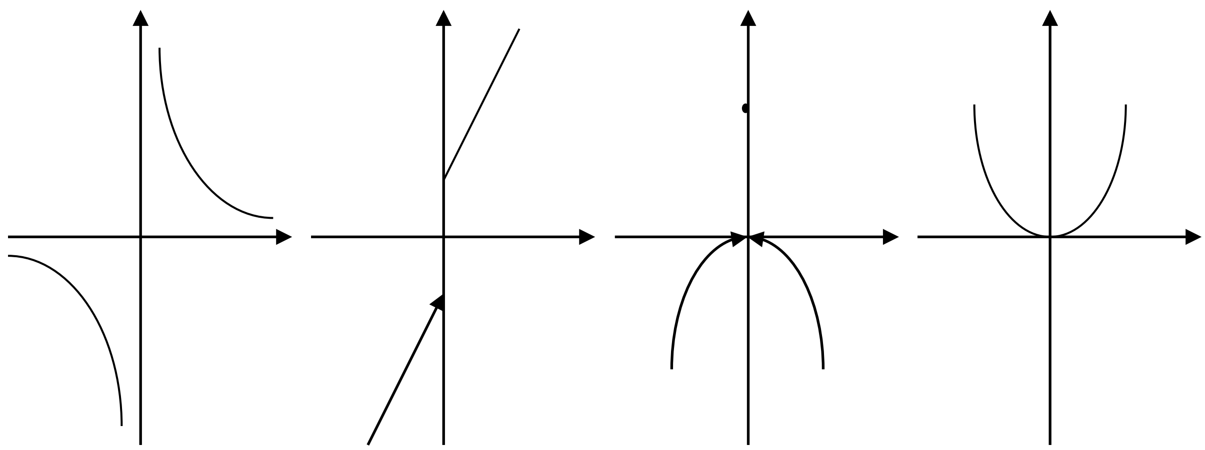


Рис.9.2

Решение. а) В точке $x=0$ функция $y=\dfrac{2}{x}$ (см. рис.9.2а)) не является непрерывной, так как

нарушено первое условие непрерывности-существование $f(0)$.

б) В точке $x=0$ функция $y=f(x)$ (см. рис.9.2б)) не является непрерывной, так как нарушено второе условие непрерывности $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ и в итоге $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

в) В точке $x=0$ функция $y=f(x)$ (см. рис.9.2в)) не является непрерывной, так как нарушено третье условие непрерывности $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ne f(0)$.

г) В точке $x=0$ функция $y=f(x)$ (см. рис.9.2г)) непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности.

Можно дать и другое определение непрерывности функции в терминах приращений: *функция $f(x)$ называется непрерывной в некоторой точке x_0, если она определена в этой точке и в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции т.е.*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \tag{9.11}$$

где $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Можно показать, что эти определения тождественны.

Действительно, если выполняется условие (9.11) и функция непрерывна при $x = x_0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right) = 0 .$$

Полагая $x_0 + \Delta x = x$, где, очевидно $x \to x_0$ при $\Delta x \to 0$, и пользуясь теоремой о пределе алгебраической суммы, получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

т.е. функция непрерывна в смысле первого определения и эквивалентность определений доказана.

Различают точки разрыва: *первого рода* (когда существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x \to x_0$, но не равные друг другу) и *второго рода* (когда хотя один из односторонних пределов слева и справа равен бесконечности или не существует). Так, точка $x_0 = 0$ на рис.9.2б) – точка разрыва первого рода, а на рис.9.2а) – точка разрыва второго рода. К точкам разрыва первого рода относятся также точки *устранимого разрыва*, когда предел функции при $x \to x_0$ существует, но не равен значению функции в этой точке. Так, точка $x_0 = 0$ на рис.9.2в) является точкой устранимого разрыва.

9.4. Свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке

Рассмотрим ***свойства функций, непрерывных в точке:***

Теорема 5. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x_0) \neq 0$) являются функциями непрерывными в точке x_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Используем утверждение 1 теоремы 2: $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0) + \varphi(x_0)$, т.е. предел суммы при $x \to x_0$ равен значению этой суммы в точке x_0.

Следовательно, функции $f(x) + \varphi(x)$ также непрерывны в точке x_0 и теорема доказана.

Аналогично доказываются остальные утверждения этой теоремы.

Теорема 6. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0 \left(f(x_0) < 0 \right)$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0 \left(f(x) < 0 \right)$.*

Доказательство этого свойства основывается на том, что при малых приращениях аргумента $\Delta x \to 0$ в соответствии со вторым определением непрерывности функции (9.11) можно получить как угодно малое приращение функции Δy, так что знак функции $y = f(x)$ в окрестности $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ не изменится.

Теорема 7. *Если функции $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right).$$

Доказательство состоит в том, что малому приращению аргумента $\Delta x \to 0$ в силу второго определения непрерывности (9.11) функции $u = \varphi(x)$ соответствует как угодно малое приращение $\Delta u \to 0$, приводящее в свою очередь в силу того же определения непрерывности функции $y = f(u)$ к как угодно малому приращению $\Delta y \to 0$. Таким образом теорема доказана.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке X,* если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Можно доказать, что все основные элементарные функции – степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические являются непрерывными во всех точках своих областей определения. Более того, исходя из выше сказанного и теоремы 2, делается вывод, что *все элементарные функции непрерывны во всех точках области определения*. Последнее утверждение позволяет вычислять пределы вида $\lim_{x \to x_0} f(x)$, где $f(x)$ - элементарная функция и x_0 принадлежит области определения этой функции, а именно

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9.12}$$

Пример 7. Доказать непрерывность функции $y = \sin x$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\sin(x + \Delta x) - \sin x) = 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2} =$

$= 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 2 \cdot \cos x \cdot 0 = 0$, так как $|\cos x| \le 1$, а $\sin 0 = 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, и по второму определению непрерывности (9.11) функция $y = \sin x$ непрерывная на всей числовой оси.

Сформулируем без доказательства ***свойства функций, непрерывных на отрезке:***

Теорема 8. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$* (см. рис.9.3).

Теорема 9. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *причем* $f(a) = A$, $f(b) = B$ *и* C *- любое число, заключенное между* A *и* B *(т.е.* $A < C < B$*). Тогда на отрезке* $[a,b]$ *найдется хотя бы одна точка* c *такая, что* $f(c) = C$ (см. рис.9.4).

Теорема 10. *Если функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она ограничена на этом отрезке* (см. рис.9.5).

Теорема 9. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она*

достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m *и наибольшего значения* M (см. рис.9.6).

9.5 Вычисление пределов функций

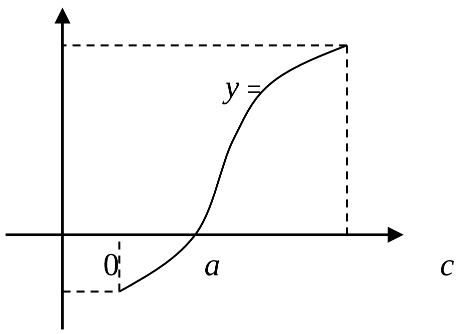


Рис.9.3

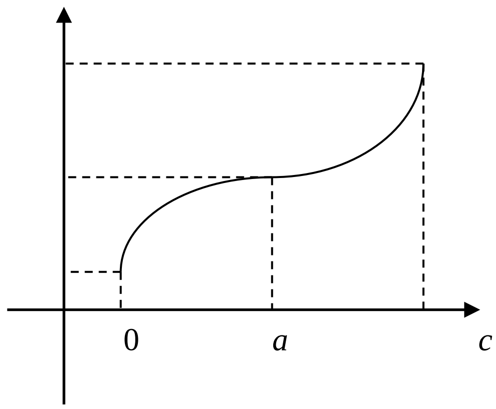


Рис.9.4

Рассмотрим те случаи вычисления пределов, которые не охватываются рассмотренными ранее способами.

Теорема о непрерывности элементарных функций позволяет вычислить пределы вида $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где $f(x)$ - элементарная функция и x_0 принадлежит области определения этой

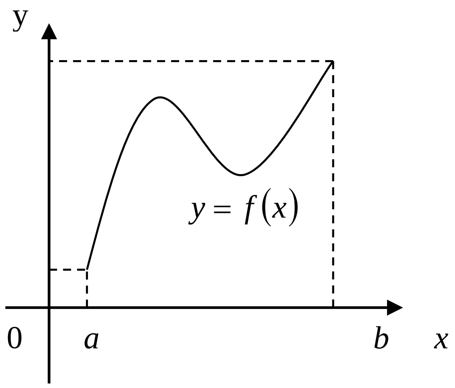


Рис.9.5

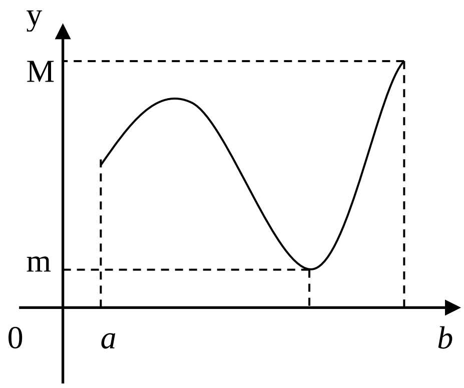


Рис.9.6

функции, а именно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{9.12}$$

На практике вычисляют значение элементарной функции, стоящей под знаком предела, при $x \to x_0$. Если в результате получено некоторое число, то оно и является пределом (это имеет место, когда x_0 принадлежит области определения). Если же в результате подстановки x_0 вместо x получается формальное выражение *(неопределенность)* вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, $\infty - \infty$, ∞^0, 0^0, то говорят о неопределенности соответствующего вида. В этом случае о пределе ничего определенного сказать нельзя, так как этот предел может быть равен нулю, бесконечности, числу, отличному от нуля, а может и вовсе не существовать. Раскрыть эти неопределенности – значит вычислить предел, если он существует, или установить, что он не существует. Это более трудная задача для решения которой применяются специальные приемы (включая правило Лопиталя и использование эквивалентных бесконечно малых). Некоторые из них рассмотрим ниже.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x+1}$.

Решение. Используя формулу (9.12), получим

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2^2+1}{2+1} = \frac{5}{3}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. Подставляя $x = x_0 = -2$ в выражение $(x^2+6x+8)/(x^3+8)$ приходим к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Для устранения неопределенности разложим многочлены на множители, сократим на множитель, дающий неопределенность и снова перейдем к пределу, подставляя $x = x_0 = -2$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x^2-2x+4} = \frac{-2+4}{4+4+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x+4}{2x^2+5x+1}$.

Решение. Формальная подстановка в выражение $x = \infty$ дает неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия делим числитель и знаменатель дроби на x в наибольшей степени входящей в знаменатель (на x^2) и переходим к пределу, применяя теорему 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{2x^2+5x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{3+0+0}{2+0+0}=\frac{3}{2}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{2x^3+5x+1}$.

Решение. Аналогично пр. 8 получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{2x^3+5x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{0}{2}=0.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+4}{2x^2+5x+1}$.

Решение. Аналогично пр. 8 получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+4}{2x^2+5x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\left\{\frac{\infty}{2}\right\}=\infty.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$.

Решение. Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$ т.к. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)=2-2=0$. Избавляемся от этой неопределенности, переводя иррациональность из числителя в знаменатель (или наоборот), дополняя иррациональности до формулы разности квадратов (суммы или разности кубов) и сокращая на множитель, дающий неопределенность.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-6+x}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=\frac{2}{4(2+2)}=\frac{1}{8}.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{6x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2}{2}=1$, и $\lim\limits_{x\to\infty}6x=\infty$, то имеет место неопределенность $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для ее раскрытия используем второй замечательный предел (9.8′).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{6x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1-2x+|1}{2x-1}\right)^{6x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot 6x\cdot\frac{2}{2x-1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{2x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{2-\frac{1}{x}}}=e^{\frac{12}{2}}=e^{6}.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x-\cos 2x-1)=\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}-1=1-0-1=0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$, то имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия преобразуем дробь

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-(\cos 2x+1)}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x-2\cos^2 x}{\sin x-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Замечание. Можно показать, что при $x\to\infty$ многочлен $a_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ эквивалентен своему старшему члену, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{a_0x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_0}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right)=1$.

Тогда при раскрытии неопределенности $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ многочлены можно заменить эквивалентными старшими членами, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\frac{a_0}{b_0}\lim_{x\to\infty}x^{n-m}.$$

В этом случае примеры 10, 11, 12 вычисляются значительно проще

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{2x^2+5x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{2x^3+5x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x^3}=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{3}{2}\cdot 0=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+4}{2x^2+5x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{2x^2}=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}x=\left\{\frac{3}{2}\cdot\infty\right\}=\infty.$$

При вычислении пределов функций при $x\to\pm\infty$ надо рассматривать арифметическое значение корня $\sqrt{x^2}=|x|$ при $x>0$ и $x<0$.

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Решение. В обоих примерах имеем неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. В первом примере при $x\to+\infty$ $x+1\sim x$, $x^2+1\sim x^2$ и $\sqrt{x^2+1}\sim\sqrt{x^2}=|x|=x$, поэтому получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1.$$

Во втором примере при $x\to-\infty$ $x+1\sim x$, $\sqrt{x^2+1}\sim\sqrt{x^2}=|x|=-x$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-1)=-1.$$

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{\ln(1+tg^2x)}$.

Решение. Используя эквивалентные бесконечно малые (см. лекц. 10, п.3).

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{\ln(1+tg^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{(3x)^2}{2tg^2 4x}=\lim_{x\to0}\frac{9x^2}{2\cdot(4x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{9x^2}{32x^2}=\frac{9}{32}.$$

Здесь $1-\cos 3x \sim \frac{(3x)^2}{2}$ при $x \to 0$ (см. формулу 9.4 табл. э.б.м.), $\ln(1+tg^2 x) \sim tg^2 4x$ при $x \to 0$ (см. формулу 5 табл.), $tg^2 4x \sim (4x)^2$ при $x \to 0$ (см. формулу 9.2 табл.).

Пример 18. Исследовать функцию на непрерывность, сделать схематический чертеж $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$.

Решение. При $x = 3$ функция не определена, следовательно она непрерывна в этой точке. Вычисляем пределы функции слева и справа от точки $x = 3$. Получаем

$$\lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{3-x}} = +\infty, \text{ так как } \lim_{x \to 3-0} \frac{1}{3-x} = \infty;$$

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{3-x}} = 0, \text{ так как } \lim_{x \to 3+0} \frac{1}{3-x} = -\infty.$$

Для построения графика дополнительно вычисляем

$$\lim_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{3-x}} = 1 \text{ и } \lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{3-x}} = 1.$$

Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода. Составляем схематический чертеж (см. рис.9.7).

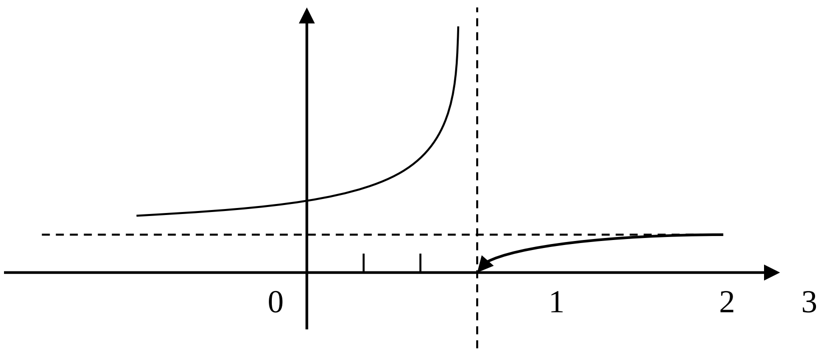


Рис.9.7

УПРАЖНЕНИЯ

1.Доказать, используя определение предела, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+2}=3$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{n}=5$.

3) $\lim\limits_{x\to5}(3x-4)=11$.

4) $\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-3\right)=1$.

2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+3x^2}{3x-2-4x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x^2+1}{3x^5-x^3+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{11}-11x^5-5}{5-x-6x^{10}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{1-12x-3x^4}$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}{x^2-x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{3x+16}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{1-\cos3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 5x}{\sin^2 3x}$;

11) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{5x\cdot\sin3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{arctg\dfrac{2}{x}}{\dfrac{5}{x}}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$;

15) $\lim\limits_{x\to1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$;

16) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{3}{4x-4}}$;

1) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$;

2) $f(x)=11^{\frac{1}{4+x}}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-5}$;

4) $f(x)=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$.

4. Какие из данных функций являются непрерывными в точке $x=1$? В случае непрерывности установить характер точки разрыва:

1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

2) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x\neq 1,\\ 2, & \text{если } x=1;\end{cases}$

3) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$;

4) $y=\dfrac{1}{x-1}$.

ЛЕКЦИЯ 10. ПРОИЗВОДНАЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Оглавление

10.1. Производная функции, ее геометрический, физический и экономический смысл

Пусть на плоскости xOy задана непрерывная на промежутке X функция $y = f(x)$. Придадим аргументу $x_0 \in X$ приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in X$. Приращением функции называют $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рис.10.1).

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *называют предел отношения приращения функции* Δy *к приращению аргумента* Δx*, если* $\Delta x \to 0$*, (если этот предел существует) и обозначают:* y', $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, т.е.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{10.1}$$

Если предел (1) будет равен $\pm\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет *бесконечную производную.*

Пример 1. Найти производную функций: а) $y = \ln x$; б) $y = \sin x$.

Решение.

а) $y = \ln x$. По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}, \text{ т.е.}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{10.2}$$

б) $y = \sin x$. По определению производной

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x, \text{ т.к. } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1. \text{ Тогда}$$

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{10.3}$$

Легко вычисляются производные функций $y = C$, где $C = const$: $y' = (C)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$, т.е.

$$(C)' = 0, \; C = const \tag{10.4}$$

и $y = x$: $(x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, т.е.

$$(x)' = 1. \tag{10.5}$$

Рассмотрим *геометрический смысл* производной функции $y = f(x)$ вычисленной в точке x_0. Для этого решим *задачу о касательной*.

Пусть на плоскости xOy задана непрерывная на промежутке X функция $y = f(x)$ и необходимо написать уравнение касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис.10.1).

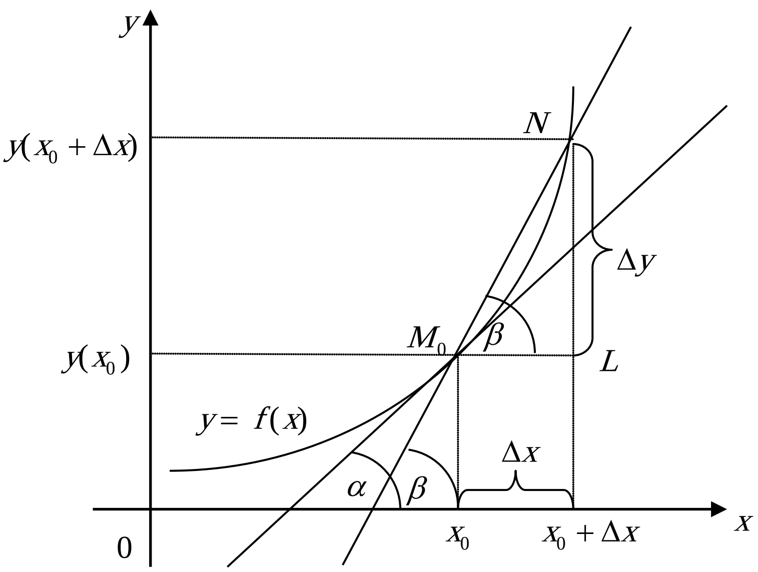


*Рис.*12.1

Дадим аргументу x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in X$. Перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ к точке $N(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$ и проведем секущую M_0N, образующую с положительным направлением оси Ox угол β. Из прямоугольного треугольника M_0LN определяем угловой коэффициент секущей

$$k_1 = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{10.6}$$

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в т. M_0 называют предельное положение секущей M_0N при условии, что т. N неограниченно приближается по графику к т. M_0.

Если обозначить через α угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox, то при $\Delta x \to 0$ будем иметь: $\beta \to \alpha$ и в силу непрерывности тангенса получим $tg\beta \to tg\alpha$, отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (10.6), найдем угловой коэффициент касательной

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{10.7}$$

Используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

записываем уравнение касательной, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{10.8}$$

Из этой задачи вытекает геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (10.7).

Из *задачи о скорости движения* следует *механический смысл производной*. Пусть $S = S(t)$ – закон движения точки по прямой. Известно, что средняя скорость движения точки за время Δt есть

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент t_0. Поэтому под *скоростью точки в момент* t_0 естественно понимать предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (10.9)$$

Из этого следует *механический смысл производной*: производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент t_0.

Из задачи *о производительности труда* следует *экономический смысл производной*. Пусть функция $U = U(t)$ выражает количество произведенной продукции U за время t. Необходимо найти производительность труда в момент t_0.

Количество произведенной продукции за промежуток $[t_0; t_0 + \Delta t]$ будет равно $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$. Тогда средняя производительность труда за время Δt равна $Z_{cp} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$. Производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$Z = \lim_{\Delta t \to 0} Z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t}. \qquad (10.10)$$

Особенно наглядный смысл получает производная функции $y = f(x)$, если под аргументом x понимать время. Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет собой *среднюю скорость изменения функции* y *за время* $[x_0; x_0 + \Delta x]$, а предел этого отношения $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть *скорость изменения функции* y *в данный момент времени* x. Например, если $U = f(t)$ – закон остывания тела, то $U' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = f'(t)$ –скорость охлаждения тела в данный момент t.

Пример 2. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \ln x$ в точке $M_0(e;1)$.

Решение. Используем формулу (10.8). Предварительно вычисляем $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ и $f'(x_0) = f'(e) = \frac{1}{e}$. Подставляем в формулу (10.8): $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$- уравнение искомой касательной.

10.2. Дифференцируемость и дифференциал функции

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если ее приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (10.11)$$

где $A = const$, $\alpha(\Delta x)$ – *бесконечно малая функция при* $\Delta x \to 0$, *т.е.* $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Установим связь между дифференцируемостью функции $y=f(x)$ в точке x_0 и существованием производной в той же точке.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость:* если $y=f(x)$ дифференцируемая в точке x_0, то она имеет в точке x_0 конечную производную. Из определения дифференцируемости функции $y=f(x)$ в точке x_0 следует, что $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Тогда полагая $\Delta x\neq 0$, получаем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha(\Delta x))=A=f'(x_0). \qquad (10.12)$$

Отсюда следует, что $f'(x_0)$ существует и $A=f'(x_0)$.

Достаточность: если существует $f'(x_0)$, то $f(x)$ функция дифференцируема в точке x_0. Из существования $f'(x_0)$ следует, что $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Из свойств функций имеющих предел следует, что в проколотой окрестности точки x_0 U_{x_0} имеет место равенство $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$. Тогда

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x\to 0, \quad \text{т.е.} \quad \Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$
$$A=const=f'(x_0).$$

А это значит, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, что и требовалось показать.

Из этой теоремы следует, что для функции $y=f(x)$ существование производной в точке x_0 и дифференцируемость функции в этой точке – равносильные понятия. Поэтому операцию вычисления производной называют *дифференцированием.*

Исследуем связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.

Теорема 2. *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из дифференцируемости функции $y=f(x)$ в т. x_0 следует, что $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $A=f'(x_0)$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=A\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0,$$

Что и означает непрерывность функции $y=f(x)$ в т. x_0, согласно второму определению непрерывности функции в т. x_0.

Замечание. Обратное утверждение не верно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, т.е. не иметь производной в этой точке. Например, функция $y=|x|$. Она непрерывна в т. $x=0$, но не имеет в этой точке производной.

Введем понятие дифференциала функции.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда согласно (10.11) ее приращение можно записать в виде

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Очевидно, что при $\Delta x\to 0$ второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с первым слагаемым. А это значит, что первое слагаемое является *главной частью* приращения функции $f(x)$.

Определение. *Дифференциалом функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *называется главная, линейная относительно* Δx *часть приращения функции и обозначается* dy*, т.е.*

$$dy=A\Delta x=f'(x_0)\Delta x. \tag{10.13}$$

Так как для функции $y=x$ дифференциал функции равен Δx, т.е. $dx=\Delta x$, то формула для вычисления дифференциала запишется

$$dy=f'(x_0)dx. \tag{10.14}$$

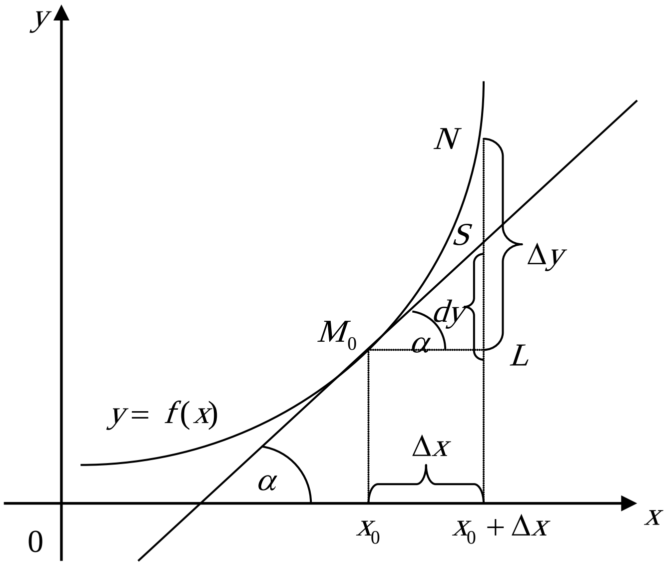


*Рис.*12.2.

Из определения (10.13), геометрического смысла производной в точке $f'(x_0)=tg\alpha$ и рис. 2 следует *геометрический смысл дифференциала функции* $y=f(x)$, вычисленного в точке x_0 (из ΔM_0LS):

$$dy(x_0)=f'(x_0)\Delta x=tg\alpha\cdot\Delta x=SL,$$

т.е. *дифференциал равен приращению ординаты касательной* от точки x_0 до точки $x_0+\Delta x$.

Из определения дифференциала как главной части приращения функции при достаточно малых значениях Δx имеет место приближенное равенство

$$\Delta y\approx dy\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x\Rightarrow$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{10.14}$$

Формула (10.14) может быть использована при приближенных вычислениях.

Пример 3. Приближенно вычислить $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Запишем формулу (10.14) для приближенного вычисления корней любой степени. Пусть $f(x)=\sqrt[n]{x}$ и $f'(x)=(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$. По формуле (10.14) имеем

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}=\sqrt[n]{x_0}\left(1+\frac{\Delta x}{nx_0}\right).$$

(.15)

Для решаемого примера $\sqrt[4]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[4]{x_0}\left(1+\frac{\Delta x}{4x_0}\right)$, т.е.

$$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}\approx\sqrt[4]{16}\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}\right)=2\frac{1}{32}.$$

10.3. Правила дифференцирования. Производная от сложной и обратной функции

Теорема 3. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы в точке* x*, то сумма, разность, произведение и частное этих функций также дифференцируемы в этой точке (в случае частного* $v(x)\neq 0$*) и имеют место формулы:*

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; (10.16)

2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(Cu)' = C \cdot u'$, $C = const$; (10.17)

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; $(v \neq 0)$; (10.18)

В качестве примера докажем формулу (10.17). Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Для доказательства воспользуемся определением производной, очевидным равенством $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$, теоремой 2 лекции 11

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) + u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) + \Delta u v(x) + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = v(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u'v + uv' + 0 \cdot u' = u'v + uv',$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, а множители u и v не зависят от Δx.

Формулы (10.16) и (10.18) доказать самостоятельно.

Следствие 1. $(u \pm v \pm w \pm \psi)' = u' \pm v' \pm w' \pm \psi'$, (10.19)

если u, v, w, ψ - дифференцируемые функции.

Следствие 2. $(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$, (10.20)

т.е. производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные множители.

Замечание. Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной. Приведем их без доказательства:

1. $dC = 0$, $C = const$.
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3. $d(u \cdot v) = vdu + udv$.
4. $d(Cu) = Cdu$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Теорема 4. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную* $f'(x_0) \neq 0$, *то обратная функция* $x = \varphi(y)$ *также имеет в соответствующей точке* $y_0 = f(x_0)$ *производную, причем*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (10.21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $y'(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Рассмотрим $x = \varphi(y)$, построим $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta y / \Delta x}$, $\Delta y \neq 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \varphi'(y_0),$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Найти производную функции $y = \arcsin x,\ -1 \le x \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $x = \sin y$ для которой $x' = \cos y$. Эти функции взаимообратные. По теореме о производной обратной функции получаем

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{т.е.}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{10.22}$$

Теорема 5. *Если функция* $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, *- дифференцируемые функции, то производная сложной функции* $y = f(\varphi(x))$ *существует и равна производной внешней функции по промежуточному аргументу умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной, т.е.*

$$y' = f'(u) \cdot u'_x. \tag{10.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из дифференцируемости функции $y = f(u)$ в точке u_0 следует $\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\cdot\Delta u$, где $\alpha(\Delta u)$ – бесконечно малая функция при $\Delta u \to 0$. Делим последнее равенство на Δx и переходим к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\cdot\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$
$$= f'(u_0)\cdot u'(x_0) = y'(x_0),$$

т.к. функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема, а значит непрерывна в точке x, следовательно, при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$ и $\alpha(\Delta u) \to 0$. Теорема доказана.

Пример 5. Найти производные следующих функций:

а) $y = \ln\arcsin 2x$; б) $y = e^x$; в) $y = x^n$.

Решение:

а) $y' = (\ln\arcsin 2x)' = \frac{1}{\arcsin 2x}\cdot(\arcsin 2x)' = \frac{1}{\arcsin 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)' = .$

$$= \frac{2}{\arcsin 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}}$$

б) Для нахождения производной от функции $y = e^x$ прологарифмируем это равенство по основанию e. Получим $\ln y = x$. Дифференцируем последнее равенство в предположении, что y – сложная функция, получаем $\frac{1}{y}y' = 1 \Rightarrow y' = y \Rightarrow (e^x) = e^x$, т.е.

$$(e^x)' = e^x. \tag{10.24}$$

в) $y = x^n$ - степенная функция. Находим y' аналогично б).

$$\ln y = \ln x^n \Rightarrow \ln y = n\cdot\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = n\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y\cdot n\cdot\frac{1}{x} = n\cdot x^n\cdot\frac{1}{x} = n\cdot x^{n-1}.$$

Окончательно

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{10.25}$$

Пример 6. Найти производную от степенно-показательной функции

$$y = (u(x))^{v(x)}.$$

Решение. Применяем метод логарифмического дифференцирования. Сначала равенство логарифмируют, а потом дифференцируют, учитывая, что $(\ln y)' = \frac{1}{y}y'$ и разрешают полученное равенство относительно y':

$$\ln y=\ln(u(x))^{v(x)}\Rightarrow \ln y=v(x)\ln u(x)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'=y\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\Rightarrow$$

$$y'=\left(u(x))^{v(x)}(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right). \qquad (10.26)$$

В частности, например, найти производную функции $y=(\sin x)^x$.

$$\ln y=\ln(\sin x)^x\Rightarrow \ln y=x\ln(\sin x)\Rightarrow\frac{1}{y}y'=\ln\sin x+x\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow$$

$$y'=y(\ln\sin x+xctgx)\Rightarrow y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+xctgx).$$

Замечание. В отличие от производной, формула (10.14) для вычисления дифференциала не меняется в зависимости от того, является ли x независимой переменной или дифференцируемой функцией независимой переменной t, т.е. $x=\varphi(t)$.

Действительно, если $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, т.е. $y=f(\varphi(t))$, то по формуле (10.14) получаем:

$$dy=(f(\varphi(t))'_t\,dt=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=f'(x)\cdot dx,$$

т.к. $x=\varphi(t)$ и $dx=\varphi'(t)dt$.

10.4. Таблица производных

Получим формулы производных основных элементарных функций.

Из формулы (10.24) по правилу дифференцирования сложной функции получаем производную показательной функции

$$(a^x)'=((e^{\ln a})^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=(e^{\ln a})^x\cdot\ln a=a^x\ln a,$$

т.е.

$$(a^x)'=a^x\ln a. \qquad (10.27)$$

Из формулы (10.2) с учетом теоремы 3 и формулы перехода к логарифмам с другим основанием получим

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}, \qquad (10.28)$$

т.е.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Из формулы (10.3) с учетом формул приведения и теоремы 5, получаем

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x,$$

т.е.

$$(\cos x)'=-\sin x. \qquad (10.30)$$

По теореме 3 и формулам (10.3) и (10.30) находим производную $y=tgx$

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т.е.

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (10.31)$$

Аналогично $$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (10.32)$$

Вывод производных функций $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ аналогичен выводу формулы (10.22) провести самостоятельно
$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad \left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (10.33)$$

Соберем все полученные формулы в таблицу производных, которую запишем в предположении, что $u = u(x)$ - сложная функция:

№	Функция y	Производная y'	№	Функция y	Производная y'
1	C	0	6	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2	x	1	7	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
3	u	u'	8	e^u	$e^u \cdot u'$
4	u^n	$nu^{n-1} \cdot u'$	9	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
5	$\sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}$	$\frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$	10	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
№	Функция y	Производная y'	№	Функция y	Производная y'
11	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	15	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	16	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13	tgu	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	17	$arctgu$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
14	$ctgu$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	18	$arcctgu$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

10.5. Производная неявной функции

Говорят, что функция $y(x)$ *задана неявно*, если она задается уравнением $F(x, y) = 0$ не разрешенным относительно y. Например,
$$x^2 + 3xy - 6y^2 + 4x - 1 = 0.$$

Для нахождения производной неявно заданной функции $y(x)$ нужно дифференцировать обе части уравнения, рассматривая x как аргумент, поэтому $x' = 1$, а $y(x)$ как сложную функцию, поэтому $(y)' = y'$. Полученное в результате дифференцирования уравнение разрешают относительно y'. Фактически этим методом мы пользовались при выводе производной функций $y = e^x$, $y = x^n$, $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$.

Пример 7. Найти производную функции, заданной неявно $x^3 - 3xy + 4\ln y = 5$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства, получаем

$$3x^2-3y-3xy'+4\frac{1}{y}y'=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-3y=\left(3x-\frac{4}{y}\right)y' \quad\Rightarrow$$

$$y'=\frac{3\left(x^2-y\right)\cdot y}{3xy-4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исходя из определения производной, найти производные следующих функций:
   1) $y=a^x$,
   2) $y=\log_a x$,
   3) $y=\cos x$,
   4) $y=x^2$.

2. Найти первые производные данных функций:

   1) $y=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2}$;
   2) $y=\ln\cos x+\frac{1}{2}tg^2 x$;
   3) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$;
   4) $y=\sin^3 2x-e^{1+\ln^2 x}$;
   5) $y=3^{\cos^2 2x}+tg\ln\sqrt{x}$;
   6) $y=ctg\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;
   7) $y=\sqrt{2x}\arcsin\frac{2x+1}{3}$;
   8) $y=e^{-x^2}\cdot\cos^3(2x+3)$;
   9) $y=4^{\cos 2x}-\sqrt[4]{3ctgx}$;
   10) $y=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$;
   11) $y=\left(\frac{2}{\cos^4 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$;
   12) $y=\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Найти производные, используя метод логарифмического дифференцирования:
   1) $y=(\arcsin x)^{2x}$;
   2) $y=(x-5)^{\sin 3x}$;
   3) $y=\left(x^3+1\right)^{ctg 2x}$;
   4) $y=(\sin)^{\cos x}$;
   5) $y=(\ln 3x)^{\frac{2}{3}x}$;
   6) $y=x^{\sin^2 3x}$.

4. Найти производные функций, заданных неявно:
   1) $\cos y=x-y$;
   2) $x-y=e^{x+y}$;
   3) $y^2=x\sin y$;
   4) $e^{x-y}-x^2+y^2=0$;
   5) $\cos xy=\frac{y}{x}$;
   6) $xe^y+ye^x=xy$;
   7) $x^2+xy+y^2=6$;
   8) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

5. Составить уравнения касательной к кривой:
   1) $y=\frac{2}{9+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=2$;
   2) $y=\frac{x^2}{4}-x$

      а) в точках ее пересечения с прямой $3x+2y-4=0$;

      б) параллельной и перпендикулярной прямой $3x+2y-4=0$.

ЛЕКЦИЯ 11. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Оглавление

11.1. Теорема Ферма

Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция* $y = f(x)$ *достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке* x_0 *этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т. е.* $f'(x_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности дифференцируемая функция $y = f(x)$ принимает в точке x_0 наименьшее значение, т. е. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in X$. Тогда для любой точки $x_0 + \Delta x \in X$, независимо от знака Δx, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Поэтому если $\Delta x > 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Если же $\Delta x < 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$. По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а это значит, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не должен зависеть от способа стремления $\Delta x \to 0$ (справа или слева), т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.. Это возможно только в случае, когда $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

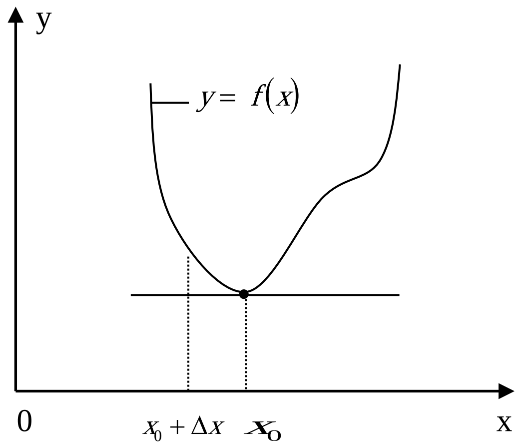


Рис.11.1

Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет наибольшее значение.

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что *в точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси Ox* (рис.11.1).

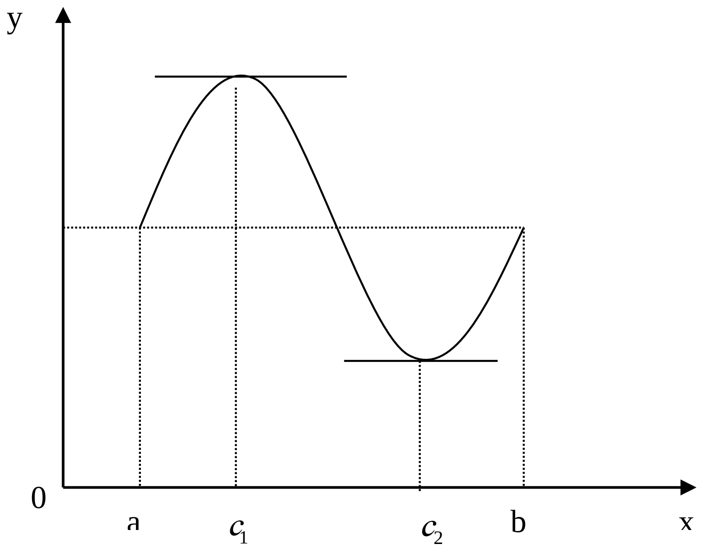


Рис.11.2

11.2. Теорема Ролля.

Теорема Ролля. *Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывна на отрезке* $[a,b]$; *2) дифференцируема на интервале (a,b); 3) на концах отрезка принимает равные значения, т. е. $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ в которой $f'(c) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что непрерывная на $[a,b]$ функция $y = f(x)$ достигает на $[a,b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений и $m \le f(x) \le M$.

Если $m = M$, то в силу последнего неравенства $f(x) = const = m = M$ на отрезке $[a,b]$. Поэтому производная $f'(x)$ равна нулю в любой точке $[a,b]$.

Если $m < M$, то в силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одно из двух значений m и M достигается внутри отрезка $[a,b]$, например, в точке $c_1 \in (a,b)$ $f(c_1) = M$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке c_1, то по теореме Ферма $f'(c_1) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает (см. рис. .2), *что если непрерывная кривая имеет в каждой точке касательную, принимает на концах отрезка равные значения, то на кривой найдется хотя бы одна точка $x = c_1$ в которой касательная параллельна оси абсцисс.*

11.3. Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа. *Пусть функция определена на [a,b], причем:*
1) непрерывна на отрезке [a,b]; 2) дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{11.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой, проходящей через две фиксированные точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Отсюда следует

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a). \qquad (11.2)$$

Составим вспомогательную функцию $F(x)$ равную разности ординат функции $y=f(x)$ и прямой AB

$$F(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right) \qquad (11.3)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, как разность двух непрерывных функций;

2) $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и имеет производную равную

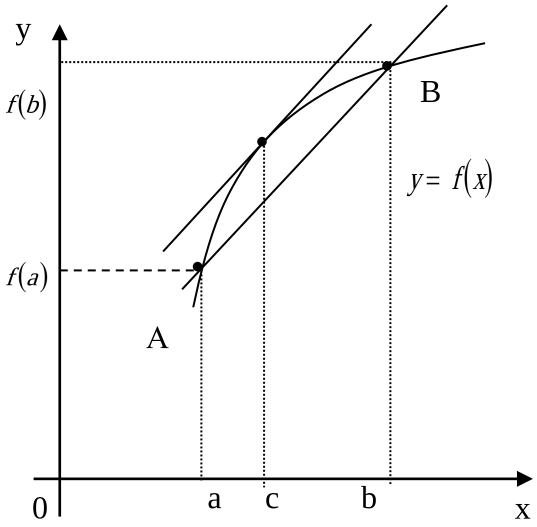


Рис.11.2

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}; \qquad (11.4)$$

3) $F(a)=F(b)=0.$

Следовательно, по теореме Ролля, существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $F'(c)=0$, т. е. $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$

Отсюда получаем требуемое

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Геометрическое толкование теоремы Лагранжа: *если перемещать прямую AB параллельно её первоначальному положению, то найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ в которой касательная к графику $f(x)$ и хорда AB, проведенная через концы дуги AB, параллельны.*

Следствие. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю на некотором промежутке X, то функция тождественно постоянна на этом промежутке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем на промежутке X отрезок $[a, x]$. Согласно теореме Лагранжа $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$, где $a<c<x$. Так как по условию $f'(c)=0$, следовательно, $f(x)-f(a)=0$, т.е. $f(x)=f(a)=const.$

11.4. Теорема Лопиталя.

Теорема Лопиталя. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\ \text{или}\ \frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (11.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим доказательство для неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x\to x_0$.

Для простоты предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$, а так же их производные непрерывны в точке x_0, причем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=0$. В этом случае

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.$$

Применяя теорему Лагранжа для функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x, x_0]$, получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)(x-x_0)}{g'(c_2)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

где $x<c_1<x_0$, $x<c_2<x_0$.

При $x\to x_0$ в силу непрерывности производных $f'(x)$ и $g'(x)$ имеем $f'(c_1)\to f'(x_0)$ и $g'(c_2)\to g'(x_0)$. Используя теорему о пределе частного, получим равенство (11.5). Теорема доказана.

Эту теорему обычно называют *правилом Лопиталя.*

Пример 1. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение. Обычно при вычислении пределов с помощью правила Лопиталя записывают только необходимые преобразования, а проверку выполнения условий делают по ходу вычислений. Если при этом окажется, что отношение производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ снова представляет собой неопределенность и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя применяют повторно.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{3x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{3e^{3x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{9e^{3x}}=0,$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2},$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{3}{x^2}e^{\frac{3}{x}}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

Дальнейшее повторное применение правила Лопиталя к раскрытию последней неопределенности не приводит к положительному результату. Применив тождественные преобразования, получаем

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{3}{x}}\left(1+x^2\right)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{3}{x}}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

г) Имеем неопределенность $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, но правило Лопиталя здесь применять нельзя, так как предел отношения производных не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ т. к. не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$. Для раскрытия этой неопределенности разделим числитель и знаменатель на x и перейдем к пределу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

Замечание. *Другие неопределенности вида* $\{0,\infty\}, \{\infty,-\infty\}, \{0^0\}, \{0^\infty\}, \{\infty^0\}, \{1^\infty\}$ *можно свести к неопределенности вида* $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ *и* $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$*, а потом применить правило Лопиталя.*

Пример 2. Найти: а) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=0.$

В случае раскрытия неопределенностей вида $\{0^0\}, \{0^\infty\}, \{\infty^0\}, \{1^\infty\}$ можно использовать для преобразований тождество

$$N^k=e^{\ln N^k}=e^{k\ln N},\quad N>0. \tag{11.6}$$

б) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x=\{0^0\}=\lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x}=e^0=1.$

Использовали результаты, полученные в пр. 2 а).

в)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}=\{\infty^0\}=\lim_{x\to 0}e^{tgx\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{\ln x}{ctgx}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1}}=e^0=1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+4x}{x^3+x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^3+3x-10}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln x-\sqrt{x+x^2}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln^2 x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^x$

12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{thx}$.

ЛЕКЦИЯ 12. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

Оглавление

12.1. Возрастание и убывание функций

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке *X*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и связанных соотношением $x_2 > x_1$ справедливо неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

Теорема 1 (достаточные условия возрастания (убывания) функции) *Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то она возрастает (убывает) на этом промежутке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in X$. Выберем два произвольных значения $x_1, x_2 \in X$ и связанных соотношением $x_2 > x_1$. Докажем, что $f(x_2) > f(x_1)$.

Для функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \tag{12.1}$$

где $x_1 < c < x_2$, т. е. $c \in X$ на котором $f'(x) > 0$. Из этого следует, что $f'(c) > 0$ и правая часть равенства (12.1) положительна, а это значит, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и $f(x_2) > f(x_1)$, что требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема в случае $f'(x) < 0$ на *X*.

Справедливо и обратное утверждение: *если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке X, то её производная $f'(x)$ неотрицательна $f'(x) \geq 0$ (неположительна $f'(x) \leq 0$) на этом промежутке.*

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 6x + 2$.

Решение. Вычислим производную $y' = 2x - 6$. Решения неравенства $y' > 0$ т. е. $2x - 6 > 0$ дает интервал возрастания функции: $2x > 6$, $x > 3$, т. е. $x \in (3; +\infty)$. Решения неравенства $y' < 0$, т. е. $2x - 6 < 0$ дает интервал убывания функции: $2x < 6$, $x < 3$, т. е. $x \in (-\infty; 3)$. Точка $x_0 = 3$ – абсцисса вершины параболы.

12.2. Экстремум функции

Точки экстремума функции относятся к очень важным, «узловым» точкам графика функции, знание которых определяет структуру графика.

Определение. *Точка* x_0 *называется точкой* **максимума (минимума)** *функции* $y = f(x)$, *если существует такая проколотая окрестность точки* x_0 $\overset{\circ}{U}_{x_0}$, *что для* $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_{x_0}$ *выполняется неравенство* $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$ (рис. 12.1, 12.2)

Точки максимума и минимума функции объединяются одним общим названием *экстремумы функции.* Экстремум функции часто называют локальным экстремумом, подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с $\overset{\circ}{U}_{x_0}$.

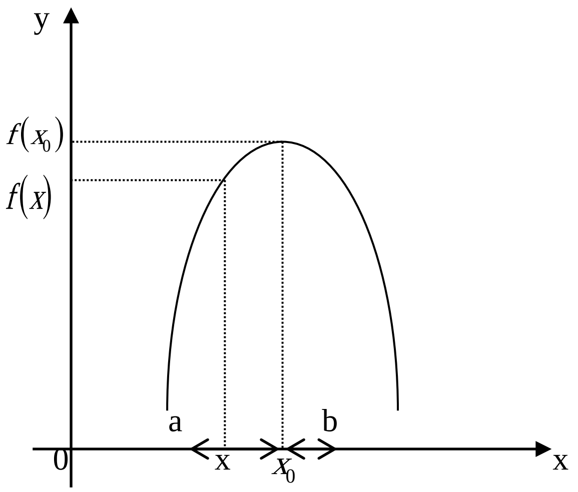


Рис.12.1.

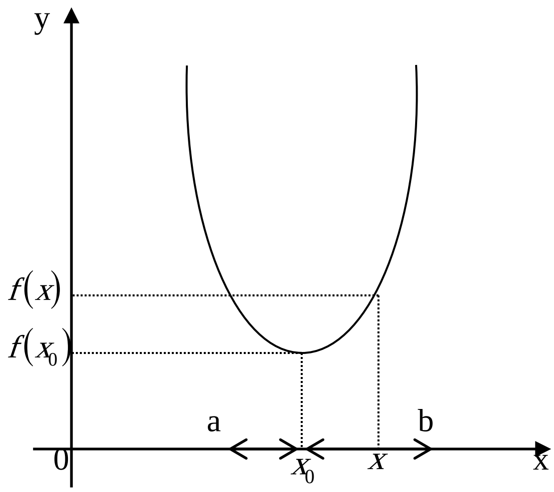


Рис.12.2.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). *Если функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0, *то* $f'(x_0) = 0$, *если она дифференцируема в этой точке или* $f'(x_0)$ *не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то в некоторой окрестности этой точки $\bigcup x_0$ выполнены условия теоремы Ферма и, следовательно, производная функции в этой точке равна нулю,

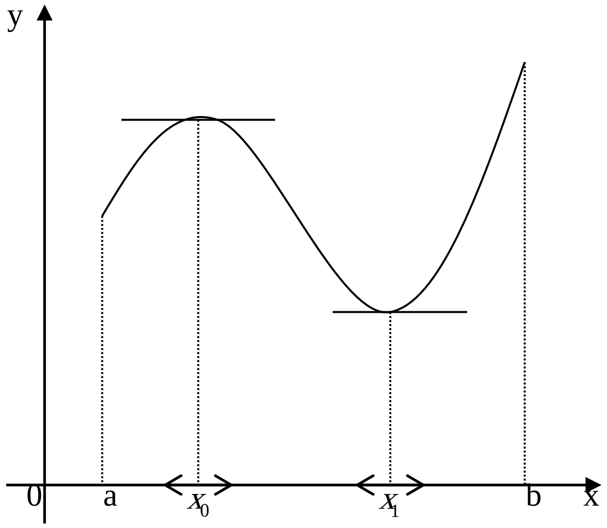


Рис.12.3

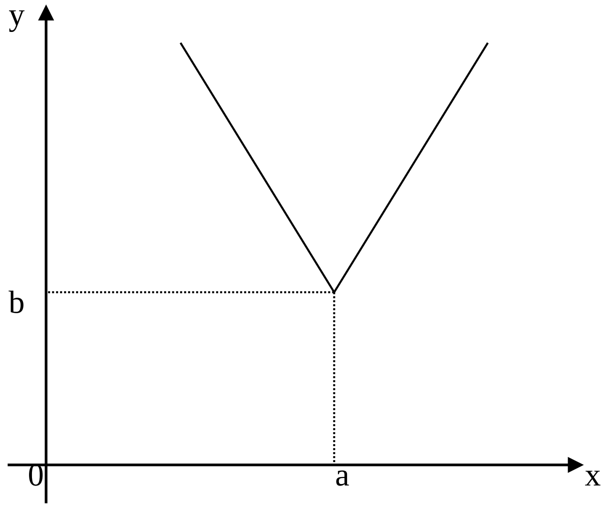


Рис.12.4

т. е. $f'(x_0)=0$ (рис.12.3).

Но функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Например, (рис.12.4) функция $y=|x-a|+b$ имеем экстремум (минимум) в точке $x=a$, но не дифференцируема в ней.

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума (т. е. в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует), называется *критическими (стационарными) точками.* Обращаем внимание на то, что эти точки должны входить в область определения функции.

Таким образом, если в некоторой точке x_0 функция имеет экстремум, то эта точка критическая. Обратное утверждение неверно, т. е. если точка x_0 – критическая точка функции, то она *может и не быть точкой локального экстремума.* Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, т. е. точка $x=0$ является критической. Но тем не менее в точке $x=0$ функция $f(x)=x^3$ не имеет локального экстремума (см. рис.12.5.). Поэтому критические точки называют точками возможного экстремума, а условие $f'(x_0)=0$ является лишь необходимым. Установим достаточные условия существования экстремума.

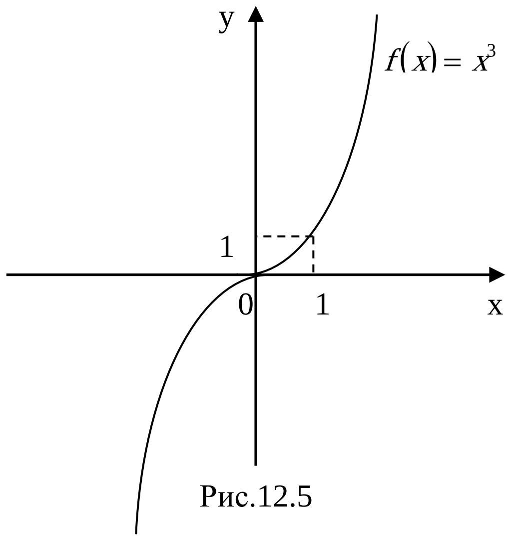


Рис.12.5

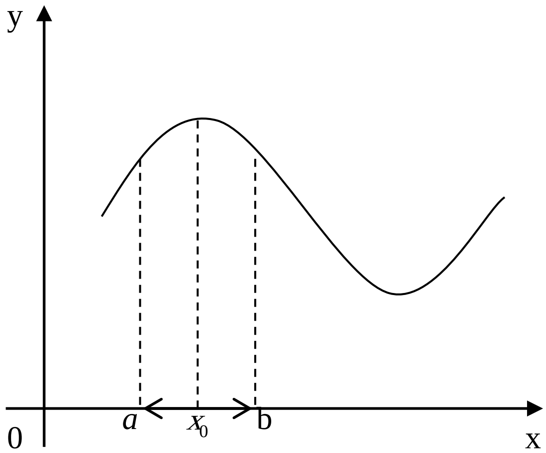


Рис.12.6

Теорема 3 *(первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в U_{x_0} и x_0 её критическая точка. Тогда если при переходе аргумента через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точкой локального максимума функции $f(x)$, если с минуса на плюс – точкой локального минимума, если при переходе через точку x_0 знак производной не меняется, то в точке x_0 локального экстремума нет.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для определенности, что при переходе через точку x_0 знак $f'(x)$ меняется с плюса на минус. Это значит, что существует U_{x_0} такая, что для $\forall\ x\in(a,\ x_0)$ $f'(x)>0$ и для $\forall\ x\in(x_0,\ b)$ $f'(x)<0$. Тогда в соответствии с достаточным условием монотонности функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a,\ x_0)$ и убывает на интервале $(x_0,\ b)$ (см. рис.12.6).

По определению возрастающей функции $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in (a,\, x_0)$, а по определению убывающей функции $f(x_0) \leq f(x)$ при всех $x \in (x_0,\, b)$, т. е. $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in (a, b)$, а это значит, что x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$.

Аналогично рассматривается случай, когда производная при переходе через критическую точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. Теорема доказана.

Пример 2. Найти экстремумы функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 2x\right)^2}$.

Решение. 1) находим *Д*(*y*) и вычисляем производную $y' = f'(x)$.
Областью определения функции является множество R, т. к. все операции, при помощи которых эта функция составлена, выполнимы в R.

$$y' = \left(\left(x^2 - 2x\right)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^2 - 2x\right)^{-\frac{1}{3}}(2x - 2) = \frac{4}{3}\frac{(x-1)}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}.$$

2) Находим критические точки функции, те в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.

$$y' = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$y' \text{ не } \exists \;\Rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ или } x = 2.$$

3) Наносим критические точки на числовую прямую (рис.12.7) с учетом области определения (наносим точки не существования, если они есть) и получаем интервалы знакопостоянства производной. Для определения знака производной в каждом из построенных интервалов его достаточно установить в любой удобной для вычислений промежуточной точке каждого интервала

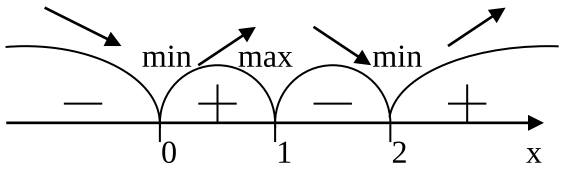


Рис.12.7

$$f'(-10) < 0, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0\,, \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0, \quad f'(10) > 0.$$

4) Тогда согласно достаточному условию экстремума точки $x = 0$ и $x = 2$ являются точками локального минимума, а $x = 1$ – локального максимума. Вычисляем значение функции в точках экстремума

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(1) = 1; \quad y_{\min} = y(2) = 0\,.$$

Пример 3. Найти экстремумы функции $y = (x-2)^3$.

Решение. 1) Область определения - вся числовая прямая. $y' = 3(x-2)^2$.

2) $y' = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$. Точек не существования производных нет.

3)

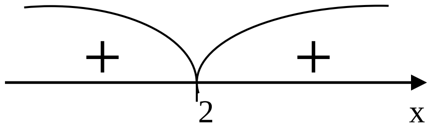


Рис.12.8

$y'(0) > 0, \;\; y'(10) > 0.$

4) Так как $f'(x)$ положительна и слева и справа от точки $x = 2$, т. е. при переходе через эту точку знак $f'(x)$ не изменяется на противоположный, то исследуемая функция не имеет точек экстремума (рис.12.8).

Замечание. Выполнение первых трех пунктов алгоритма, рассмотренного в примере 1, дает интервалы монотонности функции. Те интервалы, в которых $f'(x) > 0$ будут интервалами возрастания функции $f(x)$, в которых $f'(x) < 0$ – интервалами убывания. В примере 1 $x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$ – интервалы возрастания, $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ – интервалы убывания.

Теорема 4 *(второе достаточное условие экстремума). Если первая производная* $f'(x)$ *дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке* x_0*, а вторая производная в этой точке* $f''(x_0)$ *положительна, то* x_0 *есть точка минимума функции* $f(x)$*; если* $f''(x_0)$ *отрицательна, то* x_0 *– точка максимума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)>0$. Это значит, что $f''(x)=\left(f'(x)\right)'>0$ и в некоторой окрестности точки x_0, т. е. $f'(x)$ возрастает на некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0.

Но $f'(x_0)=0$, следовательно, на интервале $(a,\ x_0)$ $f'(x)<0$, а на интервале $(x_0,\ b)$ $f'(x)>0$, т. е. $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, т. е. x_0 – точка минимума.

Аналогично рассматривается случай $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$.

Пример 4. Найти экстремумы функции $y=2x^3-x^2$, используя второе достаточное условие экстремума.

Решение. 1) $D(y)=R,\ \ y'=6x^2-2x=2x(3x-1).$

2) Находим критические точки функции:

$$y'=0\Rightarrow x(3x-1)=0\Rightarrow x=0 \text{ или } x=\frac{1}{3};$$

точек не существования производной нет.

3) Вычисляем вторую производную и определяем знак второй производной в каждой критической точке

$y''=12x-2=2(6x-1)$;

$y''(0)=-2<0$, следовательно, в точке $x=0$ – локальный максимум;

$y''\left(\dfrac{1}{3}\right)=2>0$, следовательно, в точке $x=0$ – локальный минимум.

4) Вычисляем значение функции $y=f(x)$ в точках экстремума

$$y_{\max}=y(0)=0; \qquad y_{\min}=y\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}.$$

Второе достаточное условие экстремума утверждает, что если в критической точке x_0 $f''(x_0)\neq 0$, то в этой точке имеется экстремум. Обратное утверждение к этому неверно. Экстремум в критической точке может быть и при равенстве в ней нулю второй производной.

Рассмотрим, например, функцию $y=x^6$. Имеем $y'=6x^5,\ y''=30x^4$. В критической точке $x=0$ вторая производная также равна нулю. Но $x=0$ – точка локального минимума функции. Из этого следует, что в отличии от первого второе достаточное условие является *только достаточным, но необходимым.* Поэтому, если в критической точке x_0 $f''(x_0)=0$, то необходимо использовать первое достаточное условие.

12.3. Наибольшее и наименьшее значения функции *f*(*x*) на отрезке [*a*, *b*]

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений (абсолютного максимума и абсолютного минимума) непрерывной на отрезке [a, b] функции основан на следующих рассуждениях. Известно, что непрерывная на отрезке [a, b] функция $y=f(x)$ достигает на этом отрезке своего наибольшего M и наименьшего m значений. Эти значения могут достигаться либо на концах отрезка [a, b], либо в одной из критических точек, попадающих в интервал (a, b) (см. рис.12.9-12.11). Действительно, по определению точки локального экстремума являются внутренними точками отрезка [a, b] и находятся среди критических точек функции $f(x)$, попавших в интервал (a, b). Вместе с тем, если точка абсолютного экстремума является внутренней точкой отрезка [a, b], то она также

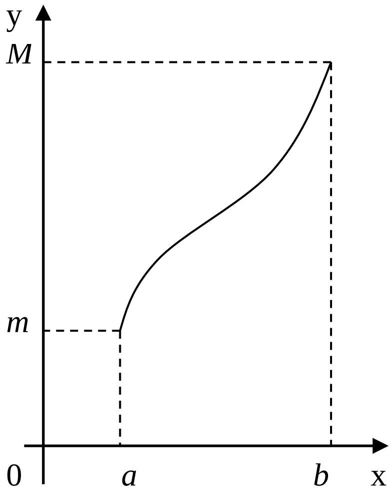


Рис.12.9

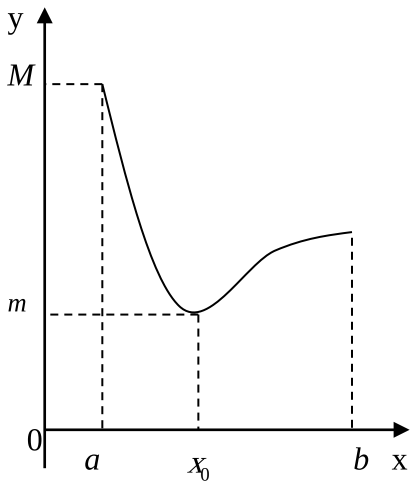


Рис.12.10

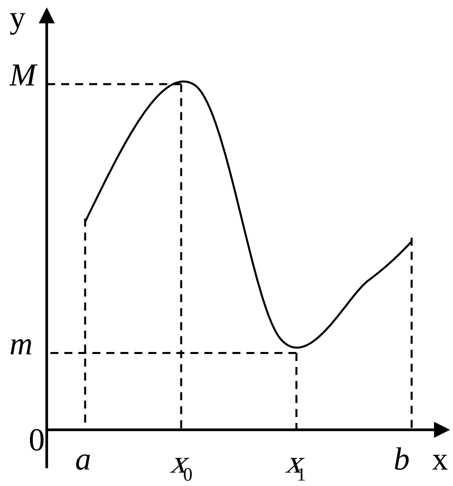


Рис.12.11

является и точкой локального экстремума. Поэтому точку абсолютного экстремума следует искать среди критических точек интервала (a, b) и граничных точек a и b.

Для отыскания *наибольшего и наименьшего значений* функции $y = f(x)$ на отрезке [a, b] можно пользоваться схемой:

1) Вычисляем производную $f'(x)$.
2) Находим критические точки функции (в которых $f'(x) = 0$ или не существует) и выбираем те из них, которые попадают в интервал (a, b).
3) Вычисляем значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка и выбираем из них наибольшее $f_{наиб.}$ и наименьшее $f_{наим.}$.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке [0; 2].

Решение. 1) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. 2) $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$. Точка $x_2 = -1$ не принадлежит интервалу (0; 2), а $x_1 = 1$ входит в интервал. Точек несуществования производной нет. 3) $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$, $y(0) = 0$, $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$. Из этих трех значений функции выбираем наибольше и наименьшее: $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 2$; $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = -2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти интервалы монотонности функций:

1) $y=(x+2)^5(2x+1)^4$, 2) $y=x-e^x$,

3) $y=x^2e^{-x}$, 4) $y=x^3-3x^2-9x+14$,

5) $y=x^4-2x^2$, 6) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

2. Найти экстремумы функций:

1) $y=2x^3-3x^2$; 2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

3) $y=x\ln^2 x$; 4) $y=\sqrt{\ln^2 x-1}$;

5) $y=\ln(2+\cos x)$; 6) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$;

7) $y=xe^{-2x}$; 8) $y-\sqrt{2+x-x^2}$;

9) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 10) $y=x-\ln(1+x^2)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на заданных отрезках:

1) $y=\dfrac{x^2-2x+16}{x-1}$, $x\in[2;\,5]$; 2) $y=2x-\sqrt{x}$, $x\in[0;\,4]$;

3) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$, $x\in[-5;\,-1]$; 4) $y=(5-x)2^{-x}$, $x\in[-1;\,0]$;

5) $y=3x^2-6x$, $x\in[0;\,3]$; 6) $y=\sqrt{100-x^2}$, $x\in[-6;\,8]$;

7) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\in[0;\,4]$; 8) $y=x^3-3x^2+6x-2$, $x\in[-1;\,1]$;

9) $y=\sin 2x-x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; 10) $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $x\in[0;\,3]$.

ЛЕКЦИЯ 13. ВЫПУКЛОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА. АСИМПТОТЫ. СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Оглавление

13.1. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Рассмотрим теперь другие «узловые» точки функции, которые также следует найти, чтобы качественно построить её график.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $M(x,\ f(x))$, причем касательная не параллельна оси Oy, поскольку её угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

Определение. *Говорят, что на интервале (a, b) график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен выше (ниже) любой касательной к графику функции на (a, b)* (рис. .1).

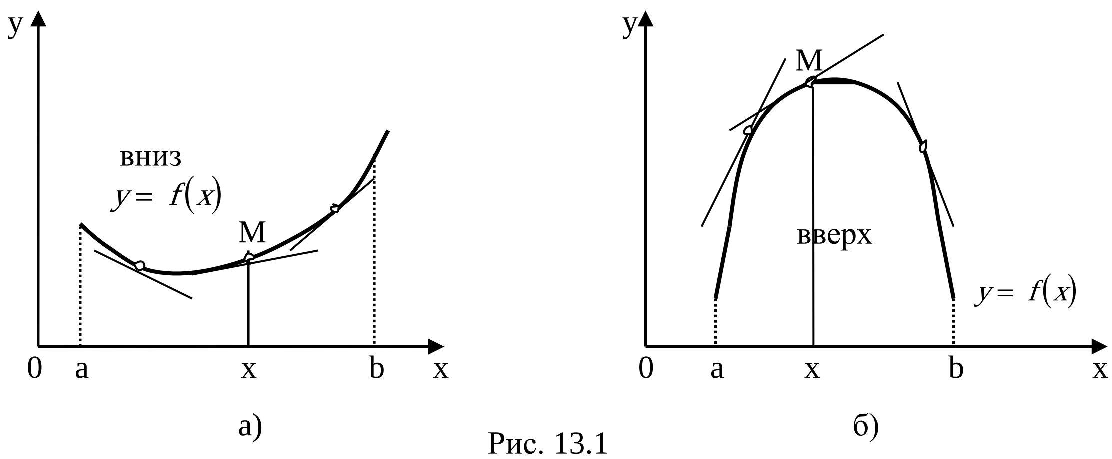


Рис. 13.1

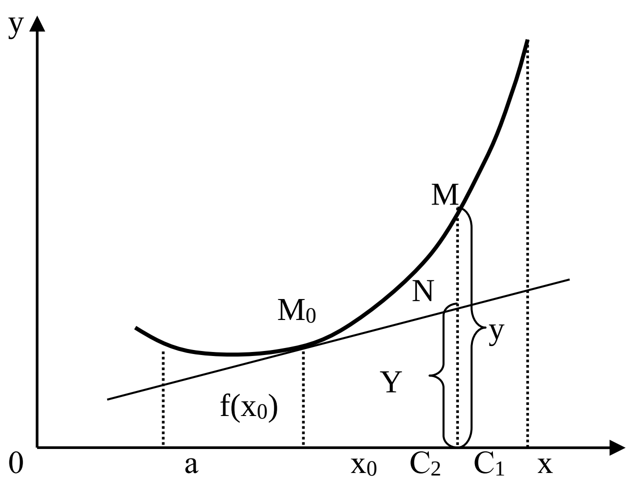


Рис. 13.2

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) во всех точках (a, b), то график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности рассмотрим случай $f''(x) > 0$ на (a, b) и x_0 – любая точка интервала (a, b). Возьмем на графике функции точку $M_0(x_0,\ f(x_0))$ и проведем через нее касательную (см. рис. 13.2). Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции в интервале (a, b) расположен выше этой касательной. Для этого сравним в любой точке $x \in (a, b)$ ординату y(x) кривой $f(x)$ с ординатой Y касательной, проведенной в точке M_0. Уравнение этой касательной имеет вид (12.8)

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Разность ординат графика функции $y = f(x)$ и касательной Y обозначим через F(x), т. е. $F(x) = y(x) - Y$. Если окажется, что F(x)>0, то y(x)>Y , т. е. ординаты графика функции $y = f(x)$ располагаются выше соответствующих ординат касательной Y, а это значит по определению, что выпуклость направлена вниз (аналогично, если y(x)<Y, то выпуклость направлена вверх). Строим F(x) и исследуем ее знак

$$F(x) = y(x) - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{13.1}$$

Используя теорему Лагранжа для функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$, получаем

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(c_1), \quad c \in (x_0, x) \tag{13.2}$$

Подставляя (13.2) в (13.1), получаем

$$F(x) = (x - x_0)\, f'(c_1) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\big(f'(c_1) - f'(x_0)\big). \tag{13.3}$$

Разность $f'(c_1) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа, применяя ее к производной $f'(x)$:

$$f'(c_1) - f'(x_0) = (c_1 - x_0)\, f''(c_2), \quad c_2 \in (x_0, c_1). \tag{13.4}$$

Подставляя (13.4) в (13.3), получаем

$$F(x) = (x - x_0)(c_1 - x_0)\, f''(c_2).$$

Так как разности $x - x_0$ и $c_1 - x_0$ имеют одинаковый знак, следовательно их произведение $(x - x_0)(c_1 - x_0) > 0$. Так как по условию $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то, в частности, $f''(c_2) > 0$. Поэтому F(x)>0 и ординаты графика функции $y = f(x)$ располагаются выше соответствующих ординат касательной, т. е. график функции имеет выпуклость, направленную вниз.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) < 0$ график имеет выпуклость, направленную вверх. Теорема доказана.

Определение. *Точкой перегиба непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция имеет выпуклости вверх и вниз* (точка М на рис.13.3).

Из вышесказанного следует, что точки перегиба – это точки экстремума первой производной. Отсюда вытекают следующие утверждения.

Теорема 2 (необходимое условие перегиба). *Пусть график функции* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $M(x_0,\ f(x_0))$ *и пусть функция f(x) имеет в точке* x_0 *непрерывную вторую производную, тогда* $f''(x_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f''(x_0) \neq 0$, тогда, в силу непрерывности второй производной, существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x)$ сохраняет знак, совпадающий со знаком $f''(x_0)$. А это значит, что график функции $y = f(x)$ имеет определенное направление выпуклости в этой окрестности. Но это противоречит наличию перегиба в точке $M(x_0,\ f(x_0))$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следует отметить, что не всякая точка $M(x_0,\ f(x_0))$, для которой $f''(x_0) = 0$, является точкой перегиба. Например, график функции $y = x^4$ не имеет перегиба в точке

$(0,0)$, хотя $f''(x)=12x^2=0$ при $x=0$. Поэтому равенство нулю второй производной является лишь *необходимым условием перегиба*.

Замечание. Есть функции, вторая производная которых в точке перегиба не существует. Например, $y=\sqrt[3]{x^5}$. D(y)=R, $y''=\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Очевидно, что $x=0$ – точка не существования второй производной. Вместе с тем, при $x\in(-\infty,0)$ $f''(x)<0$ и на этом интервале график функции имеет выпуклость, направленную вверх, а при $x\in(0,+\infty)$ $f''(x)>0$ и выпуклость вниз. Следовательно, $x=0$ – точка перегиба, хотя $f''(0)$ не существует.

Определение. *Точки, в которых вторая производная функции $y=f(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими точками второго рода.*

Теорема 3 (достаточное условие существования перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ при переходе через критическую точку второго рода x_0 меняет свой знак, то точка x_0 есть точка перегиба ее графика.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности $f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$ (см. рис.13.3). Тогда по теореме 1 слева от точки x_0 график имеет выпуклость, направленную вверх, а слева – направленную вниз, т. е. направление выпуклости слева и справа от точки x_0 является различным. Это и означает наличие перегиба в точке $M(x_0,\ f(x_0))$. Теорема доказана.

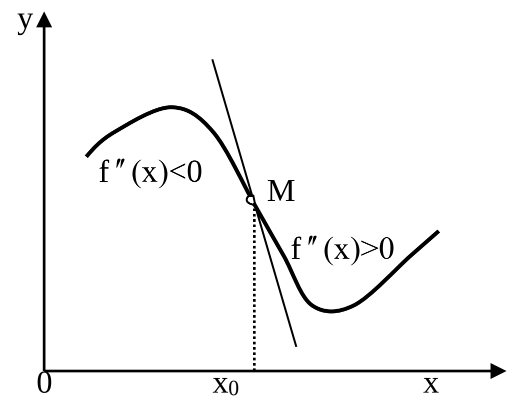


Рис.13.3

Пример 1. Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба графика функции $y=x^3+2x$.

Решение. 1) Находим D(y) и вычисляем $f''(x)$. D(y): $x\in R$; $y''=(3x^2+2)'=6x$.

2) Находим критические точки второго рода. $y''=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$.

Точек несуществования второй производной нет.

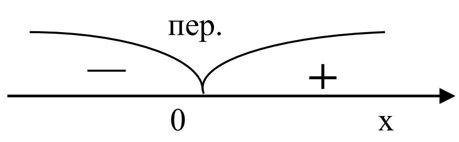


рис.13.4

3) Наносим критические точки второго рода на числовую прямую и с учетом области определения D(y) получаем интервал выпуклости вверх-вниз (см. рис.13.4). Определяем знак $f''(x)$ в каждом из полученных интервалов, установив его в любой удобной точке каждого интервала, например, $y''(-1)<0$ и $y''(1)>0$. Тогда, согласно теореме 1, на интервале $(-\infty;0)$ – выпуклость, направленная вверх, а на интервале $(0;+\infty)$ – вниз. Согласно теоремы 3 в точке $x=0$ функция имеет перегиб.

4) Вычисляем значение функции в точках перегиба.

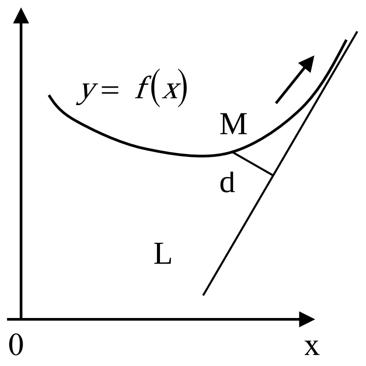
$$y_{пер}=y(0)=0.$$

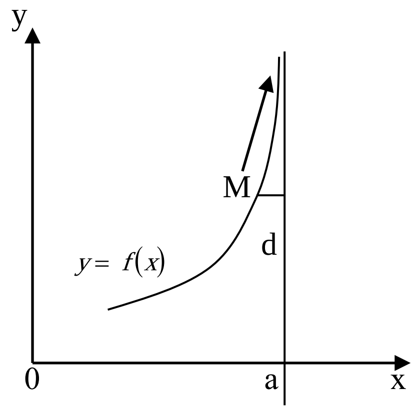
13.2. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, или в окрестности точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами* графика функции.

Определение. *Прямая L называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от переменной точки графика M(x; f(x)) до прямой стремится к нулю при удалении этой точки в бесконечность* (рис.13.5).

Существует три вида асимптот: вертикальные (рис.13.6), горизонтальные (рис.13.7) и наклонные (рис.13.5).





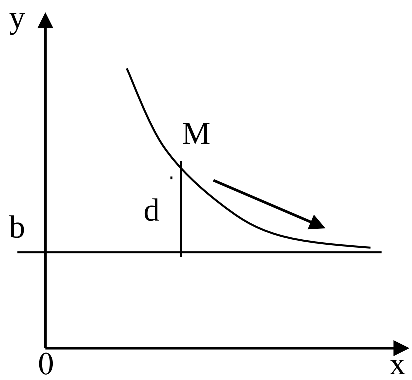


Рис.13.5 Рис.13.6

Рис.13.7

Определение. *Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно ± бесконечность.*

Очевидно, прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, так как в этом случае $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Следовательно, *вертикальные асимптоты $x = a$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения (a, b), если a и b – конечные числа.*

Определение. *Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$.

Если конечен только один из пределов $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_п$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_л$, то функция имеет лишь *правостороннюю* $y = b_п$ или *левостороннюю* $y = b_л$ горизонтальную асимптоту. Если $b_л = b_п = b$, то говорят просто о горизонтальной асимптоте $y = b$.

В том случае, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, то функция не имеет соответствующей горизонтальной асимптоты, но может иметь наклонную.

Пример 2. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x + 10}{x - 5}$.

Решение. Очевидно, что область определения функции

$x \in (-\infty;5) \cup (5;+\infty)$. Вертикальная асимптота имеет уравнение $x = a$ и значение a ищем среди точек разрыва функции, т. е. $a = 5$. Таким образом, прямая $x = 5$ может быть вертикальной асимптотой графика рассматриваемой функции. Вычисляем пределы

$$\lim_{x\to 5-0} \frac{x+10}{x-5} = -\infty, \quad \lim_{x\to 5+0} \frac{x+10}{x-5} = +\infty.$$

Из этого следует, что прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой графика исследуемой функции (см. рис.13.8).

Найдем горизонтальную асимптоту $y = b$. Для нахождения $b_л$ и $b_п$ вычисляем пределы $b_л = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+10}{x-5} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{1} = 1$, $b_п = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+10}{x-5} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{1} = 1$, используя правило Лопиталя. Так как $b_п = b_л = 1$, то график функции имеет только одну горизонтальную

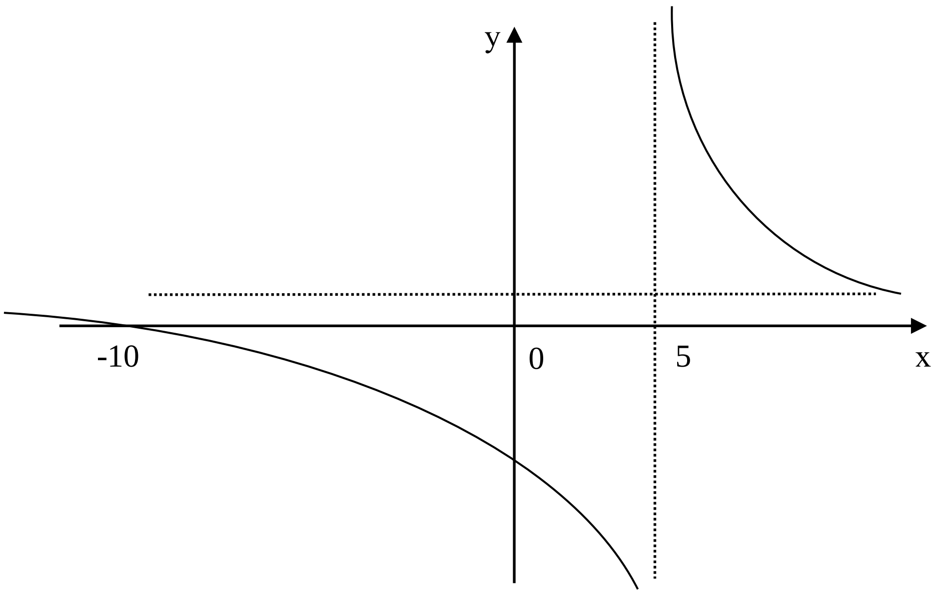


Рис.13.8.

асимптоту $y = 1$ (см. рис.13.8).

Определение. *Прямая* $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если функция определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad (13.5),$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b. \qquad (13.6)$$

Если существуют конечные пределы (13.5) и (13.6) при $x \to +\infty$ и соответственно равны $k_п$ и $b_п$, то прямую $y = k_п x + b_п$ называют *правой наклонной асимптотой*. Если существуют конечные пределы (13.5) и (13.6) при $x \to -\infty$ и соответственно равны $k_л$ и $b_л$, то прямую $y = k_л x + b_л$ называют *левой наклонной асимптотой*. Если же эти пределы совпадают, т. е. $k_п = k_л$ и $b_п = b_л$, то говорят просто о наклонной асимптоте графика функции $y = f(x)$.

Покажем, что k и b действительно вычисляются по формулам (13.5) и (13.6). Пусть M(x, y) – точка графика функции $y = f(x)$ и пусть прямая $\tilde{y} = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$. Тогда ординату точки на асимптоте обозначим через $\tilde{y}$, точку на асимптоте – через N(x, $\tilde{y}$) (рис.13.9). Из определения асимптоты следует, что $d = |MQ| \to 0$ при $x \to +\infty$. Из прямоугольного треугольника MQN следует, что $MN = \dfrac{|MQ|}{\cos\alpha} \to 0$ при $x \to +\infty$. Но $MN = PM - PN = y - \tilde{y} = f(x) - (kx + b) =$ $= \alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (kx + b)\right) = 0$.

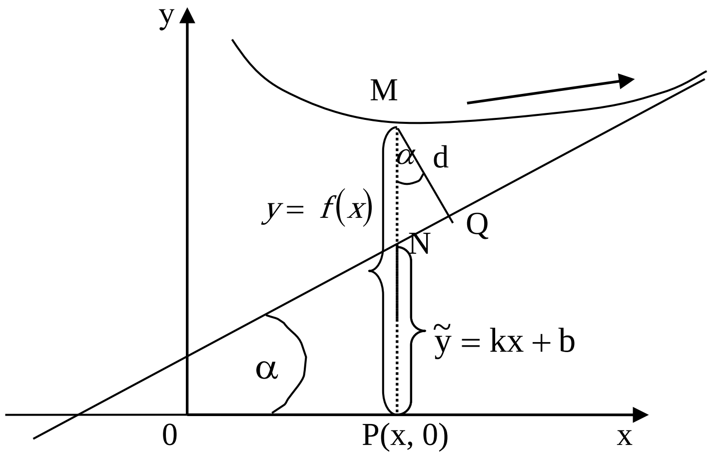


Рис.13.9.

Таким образом имеем равенство

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x), \tag{13.7}$$

разделив которое на x, и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k + \frac{b}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}.$$

Из последнего равенства следует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k = 0$ и $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Из равенства (13.7) находим b: $b = f(x) - kx - \alpha(x)$. При $x \to +\infty$ получаем $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right)$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0$. Таким образом формулы (13.5) и (13.6) установлены.

Замечание. Если хотя бы один из пределов (13.5) или (13.6) бесконечен или не существует, то график исследуемой функции не имеет соответствующей наклонной асимптоты. Если же коэффициент k в формуле (13.5) равен нулю ($k = 0$), то график функции может иметь горизонтальную асимптоту, если предел (13.6) при $k = 0$ будет конечным.

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$.

Решение. Очевидно, что график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+4} = \infty\right)$. Найдем наклонную асимптоту. Вычисляем пределы (13.5) и (13.6)

$$k_п = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x(x^2+4)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{4}{x^2}} = 2.$$

$$b_п = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+4} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{8x}{x^2+4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\frac{8}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}\right) = 0.$$

Таким образом, правая наклонная асимптота имеет вид y=2x. Очевидно, что левая наклонная асимптота будет иметь те же значения, что и правая: $k_л = 2$ и $b_л = 0$, а это значит, что график исследуемой функции будет иметь только одну наклонную асимптоту y=2x.

13.3. Схема исследования функций и построения их графиков

В предыдущих лекциях было показано, как с помощью производных первого и второго порядков исследуются общие свойства функций. Пользуясь результатами этого изучения, можно составить представление о характере функции и построить эскиз ее графика.

Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции. Исследовать функцию на четность–нечетность.
2. Найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты, исследовать поведение функции в бесконечности.
3. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
4. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
5. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Отметим, что исследование функции проводится одновременно с построением ее графика, т.е. получаемые в процессе исследования результаты сразу же наносятся на график.

В том случае, если исследуемая функция окажется четной или нечетной, то при построении графика используют симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

Пример 4. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение. Воспользуемся схемой исследования функции.

1. Область определения: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, поскольку функция неопределенна лишь в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. $x^2-1=0$, $x^2=1$, $x=\pm 1$.

Функция очевидно нечетная, так как имеет место равенство

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$, поэтому ее исследование можно проводить лишь для $x>0$, учитывая, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2. Найдем асимптоты кривой.

Вертикальными асимптотами могут быть прямые $x=\pm 1$ (т. к. ± 1 являются конечными граничными точками ее области определения). Вычисляем

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$$

и таким образом прямая $x=1$ есть вертикальная асимптота. Аналогично

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$$

и прямая $x=-1$ тоже является вертикальной асимптотой. Последний результат можно было бы получить без вычисления, учитывая центральную симметрию графика.

Горизонтальных асимптот очевидно нет, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-\dfrac{1}{x^2}}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-\dfrac{1}{x^2}}=-\infty .$$

Ищем правую наклонную асимптоту $y=k_n x+b_n$, где

$$k_п = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$b_п = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 0.$$

Тогда правая наклонная асимптота запишется $y = x$.

Вычисление левой наклонной асимптоты даст тот же результат $k_л = k_п = 1$, $b_л = b_п = 0$ и таким образом график имеет одну наклонную асимптоту $y = x$.

3. Вычисляем производную функции и находим критические точки:

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};\quad y'=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x^2=0 \text{ или } x^2=3 \Rightarrow x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3};$$

y'' не $\exists \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{4,5}=\pm1 \notin D(y)$ и не могут быть критическими.

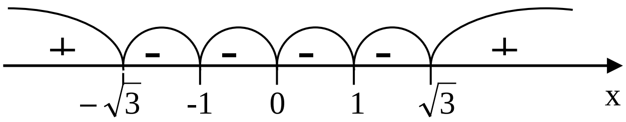


Рис.13.10.

Наносим полученные критические точки и точки не существования функции на числовую прямую и устанавливаем знак $f'(x)$ в каждом из полученных интервалов (см. рис.13.10). Таким образом имеем $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ – интервалы возрастания, $x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup \left(-1, 0\right) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$ – интервалы убывания.

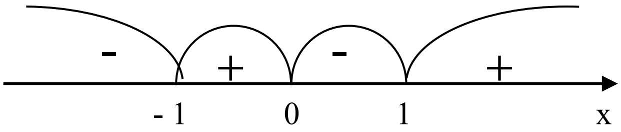


Рис.13.11.

В точке x=$-\sqrt{3}$ – локальный максимум, в точке x=$\sqrt{3}$ – локальный минимум.

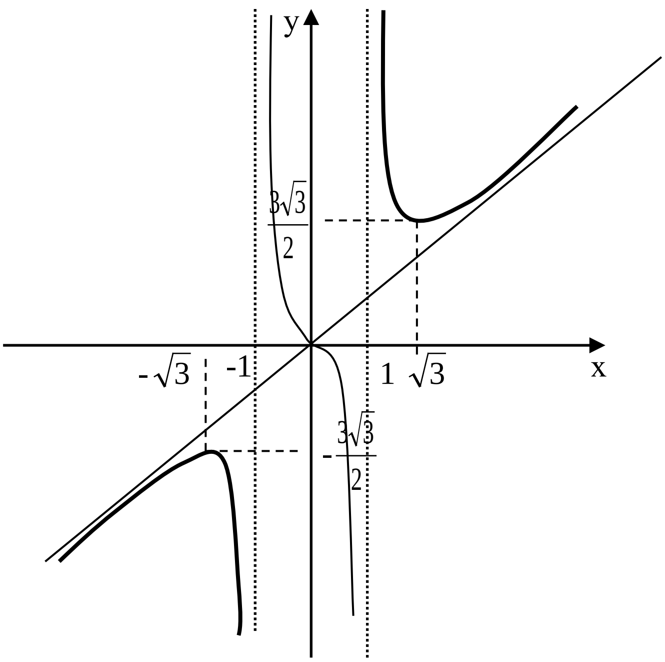


Рис.13.12.

$$y_{max}=y(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ y_{min}=y(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4. Вычисляем вторую производную и находим критические точки второго рода:

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3};$$

$y''=0 \Rightarrow 2x(x^2+3)=0 \Rightarrow x=0,$

y'' не $\exists \Rightarrow x^2-1=0,\ x^2=1,\ x_{1,2}=\pm1 \notin D(y).$

Наносим критические точки второго рода и точки несуществования функции на числовую прямую и определяем знак $f''(x)$ в каждом из полученных интервалов (см. рис.13.11). Таким образом, получаем интервалы выпуклости вверх–вниз:

$x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$ – интервал с выпуклостью, направленной вверх;

$x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$ – интервал с выпуклостью, направленной вниз.

Точка перегиба $x = 0$, $y_{пер}=y(0)=0$

5. Точки пересечения с осями координат:

Ox: y=0 $\Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0$ и точка пересечения (0, 0).

Точка пересечения с осью Oy та же.

Все результаты исследования сразу же наносятся на график и в результате получаем график исследуемой функции (рис.13.12).

Пример 5. Исследовать функцию $y=x^2e^{-x}$ и построить ее график.

Решение. 1. D(y): $x \in R$. Функция ни четная, ни нечетная, т. к. $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2 e^x \neq f(x)$ и очевидно, что $f(-x) \neq -f(x)$.

2.Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальных асимптот нет. Горизонтальные асимптоты $y = b$, где

$b_п = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 -$ правая горизонтальная асимптота;

$$b_л = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty \Rightarrow$$ левой горизонтальной асимптоты нет.

Наклонные асимптоты y=kx+b.

Правая наклонная: $k_п = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow$ нет правой наклонной, есть правая горизонтальная.

Левая наклонная: $k_л = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty \Rightarrow$ левой наклонной асимптоты нет. Таким образом, наклонных асимптот нет.

3. Вычисляем производную и находим критические точки:

$$y' = (x^2e^{-x})' = x(2-x)e^{-x};$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(2-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 2.$$

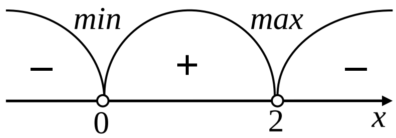


Рис. 13.13

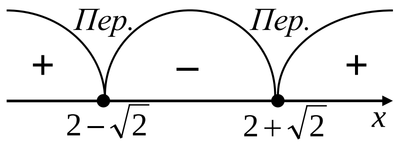


Рис. 13.14

Из вида производной следует, что точек несуществования y' нет. Из рис.13.13 следует

$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ – интервалы убывания функции;

$x \in (0, 2)$ – интервал возрастания функции;

x=0 – локальный минимум, $y_{min}=y(0)=0$;

x=2 – локальный максимум, $y_{max}=y(2)=4e^{-2}$.

4. Вычисляем вторую производную и находим критические точки второго рода:

$$y'' = ((2x - x^2)e^{-x})' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2-\sqrt{2},\ x_2 = 2+\sqrt{2}.$$

Точек несуществования второй производной нет. Из рис.13.14 следует, что на интервалах $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$ функция имеет выпуклость направленную вниз, а на интервале $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ – выпуклость вверх; $x = 2 \pm \sqrt{2}$ – точки перегиба.

$$y_{пер} = y\left(2-\sqrt{2}\right) = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}},$$

$$y_{пер} = y\left(2+\sqrt{2}\right) = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}}.$$

5. Точки пересечения с осями координат:

Ox: y=0 $\Rightarrow$ $x^2e^{-x}=0$ $\Rightarrow$ x=0 $\Rightarrow$ т. (0, 0);

Точка пересечения с осью Oy та же. На основании полученных в процессе исследования результатов строим график функции (рис.13.15)

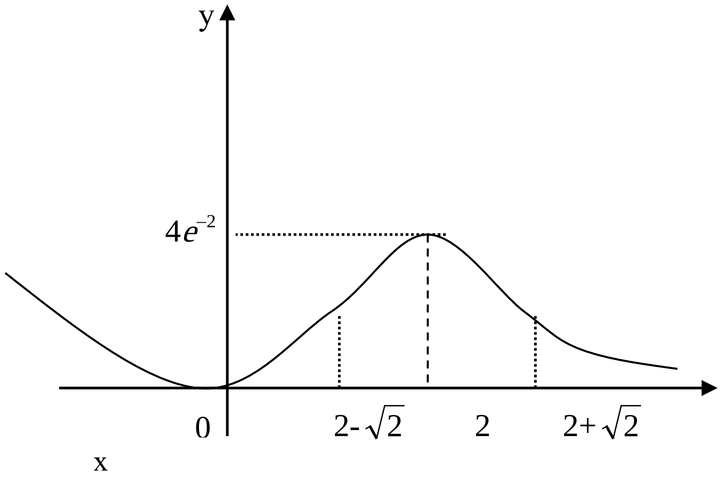


Рис.13.15

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба следующих функций:

1. $y=2x^3-3x^2+13$.
2. $y=2x^2+\ln x$.
3. $y=x^3-6x^2$.
4. $y=xe^x$.
5. $y=e^{-x^2}$.
6. $y=x^3-3x^2+2$.
7. $y=x^2(2-x)^2$.
8. $y=\frac{x}{x+1}$.

2. Найти асимптоты кривых:

1. $y=\frac{2}{x+5}$.
2. $y=\frac{x^2+8x-6}{x}$.
3. $y=\frac{x^2}{x+4}$.
4. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$.
5. $y=xe^x$.
6. $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$.
7. $y=\frac{3x^5}{2+x^4}$.
8. $y=\frac{2x^3\ln x}{x^2+1}$.

3. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y=x^2+x$.
2. $y=3x-x^3$.
3. $y=x^2(2-x)^2$.
4. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$.
5. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.
6. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.
7. $y=x+\frac{27}{x^3}$.
8. $y=(2+x)e^{-x}$.
9. $y=\frac{x}{\ln x}$.
10. $y=x\sqrt{1-x}$.
11. $y=xe^{2x-1}$.
12. $y=x-\ln(x+1)$.
13. $y=\ln\frac{x}{x-1}$.
14. $y=(x+4)e^{2x}$.
13. $y=\frac{e^x}{x}$.
16. $y=\ln(x^2+4x)$.

ЛЕКЦИЯ 14. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Оглавление

14.1. Первообразная и неопределённый интеграл

В этом параграфе рассмотрим задачу отыскания функции, для которой заданная функция является производной.

Определение. *Функция $F(x)$ называется* ***первообразной*** *функцией (или просто первообразной) для функции $f(x)$ на промежутке X, если $\forall x \in X$*

$$F'(x) = f(x). \tag{14.1}$$

Пример. Функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной функции $f(x) = x^2$ на всей числовой оси, т.к. $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Теорема. *Две дифференцируемые на некотором промежутке X функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными одной и той же функции тогда и только тогда, когда они отличаются на некоторую постоянную:*

$$\Phi(x) = F(x) + C,\ x \in X,\ C = const. \tag{14.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$ - также первообразная, поскольку $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Обратно: если $F(x)$ и $\Phi(x)$ две первообразные одной и той же функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$ и $\Phi'(x) = f(x)$, то $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f - f = 0 = C'$.

Следовательно, $\Phi(x) - F(x) = C$, или $\Phi(x) = F(x) + C$.

Определение. *Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется* ***неопределённым интегралом*** *от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.*

Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (14.3)$$

Пример. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием* этой функции.

14.2. Свойства неопределённого интеграла. Табличные интегралы

Неопределенный интеграл имеет следующие основные свойства:

2.1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

2.2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2.3. $\int dF(x) = F(x) + C$

2.4. $\int \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

где α - постоянная величина

2.5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Докажите эти свойства самостоятельно, или с помощью учебника.

Следующие интегралы от некоторых элементарных функций в дальнейшем будем называть *табличными*:

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$.

8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad |x| < a;\ a > 0$.

11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$.

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, \quad a \neq 0$.

Справедливость этих формул проверяется непосредственным дифференцированием.

Примеры. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{3^x}$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+25}$; в) $\int \frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^3}{x\sqrt{x}}\ dx$

Решение.

а) $\int \frac{dx}{3^x} = -\int 3^{-x}\, d(-x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C = C - \frac{1}{3^x \ln 3}$; (см. табл. № 4)

б) $\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{10} arctg\,\frac{2x}{5} + C$; (см. табл. № 11)

в) $\int \frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)^3}{x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{8^{3/2} + 12x + 6x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^{3/2}}\, dx = \int \left(8 + 12x^{-\frac{1}{2}} + 6\times\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}\right)\, dx =$

$= 8\int dx + 12\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + 6\int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx = 8x + 24\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$; (см. табл. №2, №3).

14.3 Методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям

Метод замены переменной (метод подстановки) осуществляют следующим образом:

$$\int f(x)\, dx = \left\{ \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{14.4}$$

Замечания: 1) $x = \varphi(t)$-функция, дифференцируемая на заданном промежутке;

2) после вычисления интеграла следует вернуться к исходной переменной.

Пример.

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \left\{ \begin{matrix} 1-2x = t; & \\ x = \frac{1}{2}(1-t) & dx = -\frac{1}{2}\, dt \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln t + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

Теорема. *Пусть* $F(x)$*– некоторая первообразная для* $f(x)$*, тогда*

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \tag{14.5}$$

где a, b*-некоторые числа,* $a \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\int f(ax+b)\, dx = \left\{ \begin{matrix} ax+b = t; \\ x = \frac{1}{a}(t-b); dx = \frac{1}{a}dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a}\int f(t)dt \pm C = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,.$$

Пример. $\int \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+C$.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. По свойству дифференциала

$$d(uv)=vdu+udv, \quad \text{или} \quad udv=d(uv)-vdu .$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du, \text{ или}$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du . \tag{14.6}$$

Формула (6) называется формулой интегрирования по частям.

Пример. $\int xe^{-2x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x; & du-dx \\ e^{-2x}dx=dv; & v=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix}\right\}=$

$$=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C .$$

В некоторых случаях для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять более одного раза. Кроме этого, на практике метод интегрирования по частям часто комбинируют с другими методами.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1 $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx;$ 1.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}};$ 1.3 $\int 2^{3x-1}dx;$ 1.4 $\int \frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx$;

1.5 $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$; 1.6 $\int \sqrt[3]{3-x}dx$; 1.7 $\int xe^{-x^2}dx$; 1.8 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

1.9 $\int x^2e^{3+5x^3}dx$; 1.10 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 1.11 $\int \frac{dx}{tgx}$; 1.12 $\int (2+3x)l^{\frac{x}{3}}dx$;

1.13 $\int (x^3+1)\ln xdx$; 1.14 $\int x^2\sin xdx$; 1.15 $\int e^x\sin xdx$.

ЛЕКЦИЯ 15. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИИ

Оглавление

15.1 Рациональные дроби. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие

Определение. *Рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *называется правильной, если* $m < n$ *и неправильной в случае* $m \geq n$.

Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получаем равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{15.1}$$

где $R(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ – некоторые многочлены, а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Пример. Записать рациональную дробь $\frac{x^3 - 3x + 4}{x - 2}$ в виде (15.1).

Решение.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3 - 3x + 4 \\ x^3 - 2x^2 \end{array} & \dfrac{x-2}{x^2 + 2x + 1} \\ \hline -\begin{array}{l} 2x^2 - 3x \\ 2x^2 - 4x \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{l} x + 4 \\ x - 2 \end{array} & \\ \hline = 6 & \end{array}$$

Ответ: $\frac{x^3 - 3x + 4}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{6}{x - 2}$.

Определение. *Рациональные дроби вида*

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}, \quad A \neq 0 \quad и \quad \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^{\beta}}, \quad M^2 + N^2 > 0, \tag{15.2}$$

где a, p, q, α, β, A, M *и* N *– действительные числа и* $\frac{p^2}{4} - q < 0$, *называются* ***элементарными рациональными дробями.***

Существует теорема, которая утверждает, что всякая ненулевая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму элементарных рациональных дробей. Она формулируется следующим образом .

Теорема. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *- правильная рациональная дробь,* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *–многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$Q\,(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}...(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_s},$$

a_i *- попарно различные действительные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* α_i, $i=$ *1, 2, …,* r, $x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, z_j *и* $\bar{z}_j$ *попарно различные при разных* j *существенно комплексные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* β_j, $j = 1,\ 2,\ \dots,\ s$, *то существуют действительные числа* $A_i^{(\alpha)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots\dots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \text{ и } N_j^{(\beta)},\ j = 1, 2, \dots, s,\ \ \beta = 1, 2, \dots, \beta_j,$$

такие, что

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)} + \cdots + \\ & + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_{r1}}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \cdots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{(x-a_r)} + \\ & \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_s-1}} + \cdots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \\ & + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \cdots + \frac{M_s^{(\beta_s)}x + N_s^{(\beta_s)}}{x^2+p_sx+q_s}.\end{aligned} \tag{15.3}$$

При выполнении разложения вида (15.3) оказывается удобным *метод неопределённых коэффициентов.* Он состоит в следующем. Для данной правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ записывают разложение (15.3), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считают неизвестными. После этого обе части равенства приводят к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравнивают коэффициент при одинаковых степенях x. Из полученной системы уравнений получают неизвестные коэффициенты.

Пример. Разложить на элементарные дроби рациональную дробь $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

Решение. Согласно (15.3) искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Приведя к общему знаменателю, получим:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x}{x(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{\left(A+D\right)x^4+Ex^3+\left(2A+B+D\right)x^2+\left(C+E\right)x+A}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

Отбросим знаменатели и получим

$$x^2-1=\left(A+D\right)x^4+Ex^3+\left(2A+B+D\right)x^2+\left(C+E\right)x+A$$

Приравниваем коэффициент при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 0=A+D \\ x^3 & 0=E \\ x^2 & 1=2A+B+D \\ x & 0=C+E \\ x^0 & -1=A \end{array}$$

Отсюда находим $A=-1, B=2, C=0, D=1, E=0.$

Искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{x}{x^2+1}$$

15.2 Интегрирование простейших рациональных дробей

Рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$a)\dfrac{A}{\left(x-a\right)^n}, n=1,2,...$

$b)\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+g\right)^n},$ где $\dfrac{p^2}{4}-g<0, n=1,2,...$

а) Если $n=1$,то

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d\left(x-a\right)}{x-a}=A\ln\left(x-a\right)+c; \quad (15.4)$$

если $n\geq 2$, то

$$\int\frac{A}{\left(x-a\right)^n}dx=A\int\left(x-a\right)^{-n}d\left(x-a\right)=-\frac{A}{\left(n-1\right)\left(x-a\right)^{n-1}}+C \quad (15.5)$$

b) Пусть $n=1$

Заметим, что

$$x^2+\frac{\rho}{2}=t; q-\frac{\rho^2}{4}=a^2.(т.к.\ q-\frac{\rho^2}{4}>0)$$

Обозначим

$$t=x+\frac{p}{2}.\ \ a^2=q-\frac{p^2}{4}. \qquad (\text{т.к. } q-\frac{p^2}{4}>0\ )$$

Тогда

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$
$$\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{t}{a}+C=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{2x+p}{2a}+C. \qquad (15.6)$$

В случае $n>1$, полагая, как и выше, $t=x+\frac{p}{2}.\ \ a^2=q-\frac{p^2}{4}.$
Подобным же образом получим

$$(15.7) \qquad \int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=M\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2N-pM}{2}\int\frac{dt}{(t^2-a^2)^n}.$$

Рассмотрим отдельно каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^{2)^n}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+C. \qquad (15.8)$$

Второй же интеграл правой части равенства вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$l_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n},\ \ n=1,2,3,...$$

Проинтегрируем I_n по частям, положив

$$U=\frac{1}{(t^2+a^2)^n},\ \ dv=dt.$$

После преобразований получим

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}In,\ n=1,2,... \qquad (15.9)$$

Интеграл

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C.$$

Формула (15.9) позволяет вычислить I_2; зная I_2 по той же формуле можно найти I_3 .Продолжается этот процесс, можно найти выражение для любого n .

Пример. Вычислить $\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$

Решение. Выделим целую часть, разделив числительна знаменатель**:**

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}=x+\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

Для правильной рациональной дроби в предыдущем параграфе получено разложение на сумму простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx=\int x\,dx-$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}-\ln[x]+\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}-\ln[x]-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

15.3 Интегрирование некоторых видов иррациональностей

В некоторых случаях замена переменной позволяет интегралы от иррациональных функций свести к интегралам от рациональных функций.

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{x},\sqrt[n]{x}\right)dx,$$

где $R\left(x,\sqrt[m]{x},\sqrt[n]{x}\right)$-рациональная функция своих аргументов.

Такие интегралы рационализируются подстановкой: $t=\sqrt[p]{x}$, где p-наименьшее общее кратное чисел m и n.

Пример. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Решение. Осуществим подстановку $t=\sqrt[6]{x}$; тогда $x=t^6;\sqrt{x}=t^3;\sqrt[3]{x}=t^2;dx=6t^5\,dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt=6\int\frac{t^3}{t+1}\,dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt=6\int\frac{t^3+1}{t+1}\,dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\int\frac{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}{t+1}\,dt-6\ln|t+1|+c=6\int\left(t^2-t+1\right)dt-6\ln|t+1|+c=$$

$$=6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}+6t-6\ln|t+1|+c=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+c$$

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[m_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[m_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[m_i]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Пусть $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$, тогда подстановка

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d},$$

где m- наименьшее общее кратное чисел $m_1, m_2, ..., m_i$, рационализирует этот интеграл.

Замечание: если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то подкоренные выражения подынтегральной функции не зависят от x (***проверьте!***).

Пример. Найти $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x}$

*Решение***.** Положим $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Тогда $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = -\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}$, $1+x = \frac{2}{1+t^2}$, $\frac{1}{x+1} = \frac{1+t^2}{2}$.

Следовательно,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x} = \int \frac{t\left(1 = t^2\right)}{2}\left(\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt = -2\int \frac{t^2\,dt}{1+t^2} = -2\int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2 = 1}dt = -2\int dt + 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -2t = 2arctgt + C = -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c,}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0.$

В том случае, когда подкоренное выражение неотрицательно, интегралы легко сводятся с помощью замены переменного к табличным.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

Решение. $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1.$

Осуществим замену $t = x + 2; dx = dt.$ Получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C = \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить

2.1 $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx$; 2.2 $\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}\,dx$; 2.3 $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}\,dx$;

2.4 $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\,dx$; 2.5 $\int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$. 2.6 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;

2.7 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$; 2.8 $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$.

ЛЕКЦИЯ 16. ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕКОТОРЫХ ТРАНЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Оглавление

16.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Интегралы такого вида с помощью подстановки $u = tg\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi,$ сводятся к интегралам от рациональной дроби. Действительно, поскольку

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}; \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2};\ dx = \frac{2du}{1+u^2}$$
$$\textit{поэтому} \int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}. \qquad (16.1)$$

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение. Воспользуемся формулами (16.1).

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} = 2\int \frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u} + C = C - \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}.$$

Замечание. Указанная подстановка в итоге всегда приведет к интегралу от рациональной дроби. Вместе с тем другие методы, в частности подстановки вида

$$u = \sin x;\ u = \cos x;\ u = tgx, \qquad (16.2)$$

иногда приводят к менее громоздким выкладкам.

Рассмотрим , например, интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1+tg^2 x\right)d(tgx) = \{u = tgx\} = \int \left(1+u^2\right)du = u + \frac{u^3}{3} + C =$$
$$= tgx + \frac{1}{3}tg^3 x + C$$

16.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \; dx, \int \sin \alpha x \cos \beta x \; dx$

Рассмотрим $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, *m, n* –целые (не обязательно положительные).

Пусть хотя бы одно из чисел *m, n*-нечетное, например, *m = 2k + 1*. Тогда подстановка $u = \cos x$ (при *n= 2k+1* нечетном подстановка $u = \sin x$) приводит рассматриваемый интеграл к интегралу рациональной дроби.

Пример. Найти $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$

Решение

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \; dx. = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \; dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x \; dx = du \\ \cos^2 x = 1 - u^2 \end{array} \right\} = \int u^2 \left(1 - u^2\right) du =$$

$$= \int \left(u^2 - u^4\right) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Если оба показателя степени *m* и *n* четные положительные или один из них ноль, то целесообразно применять формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \qquad (16.3)$$

Пример. $\int \cos^2 x \; dx. = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \; dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c.$

Интегралы $\int \sin \alpha x \cos \beta x \; dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x \; dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x \; dx$ легко вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать по формулам

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x \right],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x \right], \qquad (16.4)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x \right].$$

Пример. Вычислить $\int \sin 2x \cos x \; dx.$

Решение. $\int \sin 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \left(\sin 3x + \sin x\right) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + c$.

16.3 Интегралы от трансцендентных функций

К таким интегралам относятся, например, интегралы

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,\ \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx,\ \int x^n\cos\beta x\,dx,\ \int x^n\sin\beta x\,dx,\ \int x^n e^{\alpha x}dx,\ \int x^n\arcsin x\,dx,$$

$\int x^n\arccos x\,dx,\ \int x^n arctgx\,dx,\ \int x^n arcctgx\,dx,\ \int x^n\ln x\,dx$ (n-целое, неотрицательное).

Все эти интегралы вычисляются с помощью последовательного интегрирования по частям. Действительно, имеем

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta\,xdx=\int e^{\alpha x}d\,\frac{\sin\beta\,x}{\beta}=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta\,xdx=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}d\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right)=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}+\frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}\left(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x\right)}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

Откуда

$$I=\frac{e^{\alpha x}\left(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\ \beta^2}+C. \qquad (16.5)$$

Аналогично интегралу $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx,$ вычисляется интеграл

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C \qquad (16.6)$$

В интегралах $\int x^n\cos\alpha x\,dx,\int x^n\sin\alpha x\,dx,\int x^n e^{\alpha x}dx,$ положив $u=x^n$ и соответственно $dv=\cos\alpha xdx,\ dv=\sin\alpha xdx, dv=e^{\alpha x}dx,$ после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с показателем степени, меньшим на единицу. Применяя этот прием n раз, придем к интегралу рассматриваемого типа с $n=0$, который, очевидно, сразу берется.

Пример.

$$\int x^2\sin x\,dx=\int x^2d\left(-\cos x\right)=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx=$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Наконец, интегралы $\int x^n\arcsin x\,dx,\ \int x^n\arccos x\,dx,\ \int x^n arctgx\,dx,\ \int x^n\ln x\,dx$ сводятся интегрированием по частям к интегралу от алгебраической функции, если в них положить $dv=x^n dx$, а за функцию u взять оставшуюся трансцендентную функцию, т.е. одну из функций $\arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx,\ \ln x$

Пример. $\int x\ln x dx=\int \ln x\, d\,\frac{x^2}{2}=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$

16.4 Замечания об интегралах, не выражающихся через элементарные функции

Мы рассмотрели различные классы элементарных функций и нашли их первообразные, которые являются также элементарными функциями. Однако не всякая элементарная функция имеет в качестве своей первообразной элементарную же функцию.

Имеется ряд интегралов от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции и играющих большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях. К таким интегралам относится, например, интеграл

$$\int e^{-x^2}dx,$$

а также так называемые *эллиптические интегралы*

$$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx,$$

где P (x)-многочлен третьей или четвёртой степени. В общем случае эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Особенно часто встречаются интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\qquad \text{и}\qquad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}},\qquad 0<k<1,$$

которые подстановкой x=sinφ приводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad \text{и}\qquad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\ ;$$

они называются соответственно эллиптическими интегралами *первого* и *второго рода в форме Лежандра.*

Указанные интегралы не могут быть найдены с помощью рассмотренных выше методов интегрирования. Однако это не означает, что эти интегралы не существуют или их невозможно найти.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти интегралы:

3.1 $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

3.2 $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

3.3 $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}\,dx$

3.4 $\int \cos^3 x\,dx$

3.5 $\int \sin^3 \frac{x}{2}\cos^5 \frac{x}{2}\,dx$

3.6 $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

3.7 $\int \sin 10x \sin 15x\,dx$

3.8 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$

3.9 $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$

3.10 $\int x^2\cos 3x\,dx$

3.11 $\int e^x \sin\frac{x}{2}\,dx$

3.12 $\int x^2 \ln\frac{x}{3}\,dx$

ЛЕКЦИЯ 17. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Оглавление

17.1 Понятие определенного интеграла. Геометрический и экономический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок произвольным образом на n частей: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_i < ... < x_n = b$ (см. рис.17.1)

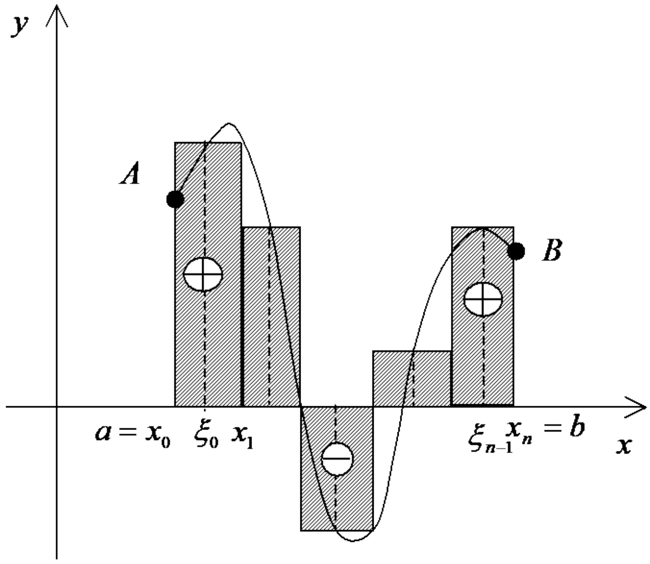


Рис.17.

Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{17.1}$$

где $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}; \Delta x_i = x_{i+1} - x_i; i = 0,1,2,...,(n-1)$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a,b]$. Геометрически S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников (см. рис.17.1)

Определение. *Предел суммы S_n при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а наибольшая из разностей Δx_i - к нулю, называется* ***определенным интегралом*** *функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$, т.е.*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_1 \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{17.2}$$

Геометрически определенный интеграл (17.2) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, составляющих криволинейную трапецию а АВ b, в которой площади частей, распложенных выше оси ОХ, берутся со знаком плюс, а площади частей, расположенных ниже оси ОХ, -со знаком минус.

Замечание. Не имеет значения, какой буквой обозначена переменная интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = ...,$$

поскольку смена обозначений никак не влияет на поведение интегральной суммы (17.1)

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что a<b. По определению положим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{17.3}$$

Пусть в (4.3) a=b тогда получим

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx, \quad или \quad 2\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \text{следовательно}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{17.4}$$

К экономическому смыслу определенного интеграла приводит следующая задача.

Пусть $z = f(t) - функция,$ которая описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции U произведенной за промежуток времени $[0,T]$. Разобьем $[0,T]$ на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

Величину объёма продукции ΔU_i, произведенный за промежуток времени $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ приближенно можно изменить в виде:

$$\Delta\ U_i\ \approx\ f(\xi_i)\Delta t_i, \text{ где } t_i \le \xi \le t_{i+1},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ldots,(n-1)$$

Тогда $U \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\ (\xi_i)\Delta t_i$.

При $n \to \infty$ и $\max \Delta t_i \to 0$

$$U = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n\to1} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_o^T f(t)\,dt.$$

Таким образом, если $f(t)$ - производительность труда в момент времени t, то $\int_O^T f(t)$ есть объём продукции, выпущенной за промежуток времени $[0,T]$. Достаточные условия интегрируемости функции (существования определённого интеграла) формулирует следующая теорема.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [а, в], то она интегрируема на этом отрезке.

17.2 Свойства определённого интеграла

Будем рассматривать интегрируемые функции. Имеют место следующие свойства.

1. $\int_a^в C \cdot f(x)\, dx = C\int_a^в f(x)\, dx$, где C = const (17.5)

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Разобьём отрезок интегрирования [а, в] на n частей точками:
а = $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ = ***в.***

На каждом из отрезков разбиения Δx_i ***выберем точку*** ξ_i ***(i=0,1,2,…,n-1).***

Используя ассоциативный (распределительный) закон умножения чисел, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} Cf(\xi_i)\Delta x_i = C\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Перейдя к пределу в обеих частях этого равенства при $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$, получим (17.5).

2. $$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx \qquad (17.6)$$

Доказательство аналогично предыдущему (докажите самостоятельно).

Нетрудно видеть, что это свойство выполняется для любого числа слагаемых.

3. $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad (17.7)$$

Действительно, пусть $a < c < b$. Рассмотрим геометрический смысл этого свойства (см. рис.).Очевидно $S = S_1 + S_2$, но $S_1 = \int_a^c f(x)\, dx$, а $S_2 = \int_c^b f(x)\, dx$. Тогда

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

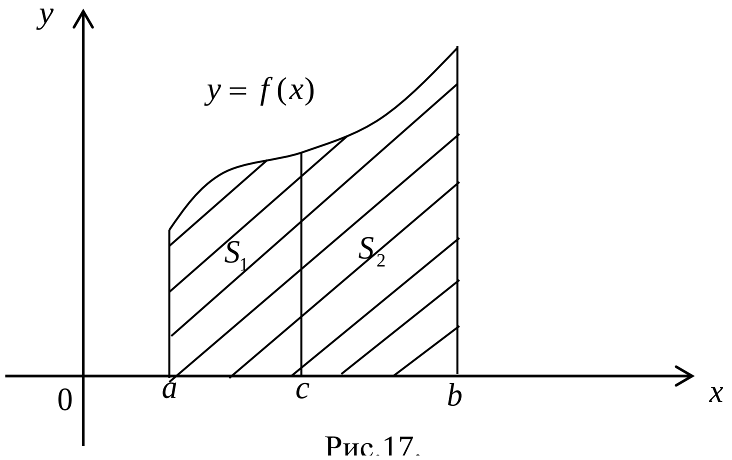


Рис.17.

Разберите самостоятельно другие варианты расположения точек a, b, c.

4. Если на $[a,b]$, где $a < b$ $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \le \int_a^b g(x) dx. \qquad (17.8)$$

Это неравенство вытекает из аналогичного неравенства для интегральных сумм.

Следствие. Пусть на $[a,b]$, где $a<b$, $m \le f(x) \le M$, где m и M - некоторые числа. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \tag{17.9}$$

5**. Теорема о среднем**. *Если* $y = f(x)$ *непрерывна на [a,b], где a<b, то найдется такое*

$$\xi \in [a,b], \text{что} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \tag{17.10}$$

Геометрически (17.10) означает, что если f(x)- непрерывная функция на [a,b] то всегда найдется точка $a \le \xi \le b$, что площадь криволинейной трапеции aABb равняется площади прямоугольника aA_1B_1b .

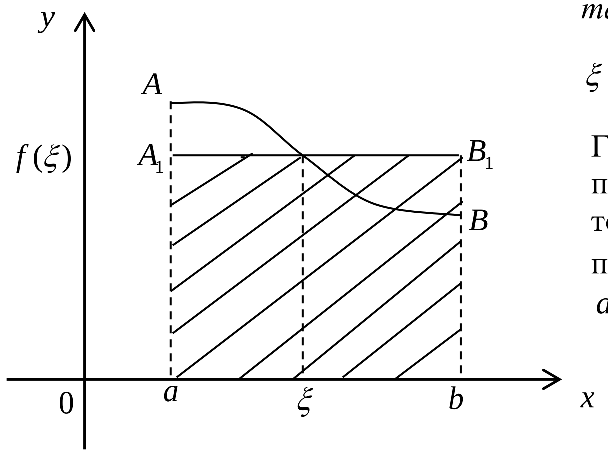


Рис.17.

17.3 Определенный интеграл, как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $y = f(x)$ – интегрируема на $[a,b]$. Тогда она интегрируема на любом $[a,x]$, где $a \le x \le b$.

Определение. *Функция*

$$\Phi = \int_a^x f(t)\,dt \tag{17.11},$$

где $x \in [a,b]$*, называется интегралом с переменным верхним пределом.*

Можно доказать, что если *f(x)*- интегрируемая на [a,b] функция то *Φ(x)*- непрерывна на этом отрезке, дифференцируема в любой точке $x_0 \in [a,b]$ и $\Phi'(x_0) = f(x)$; другими словами функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(t)$.

Это свойство дает возможность получить формулу для вычисления определенного интеграла. Такая формула получена в результате доказательства основной теоремы интегрального исчисления, которую связывают с именами И.Ньютона и Г.Лейбница.

Теорема. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $F(x)$*-любая ее первообразная на* $[a,b]$. *Тогда определенный интеграл от* $f(x)$ *на* $[a,b]$ *равен приращению первообразной на этом отрезке:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \tag{17.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Согласно свойствам интеграла с переменным верхним пределом, $\Phi(x)$ - также является первообразной этой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Таким образом, F и Φ - две первообразные одной и той же функции f на $[a,b]$, поэтому $\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \le x \le b,$ где C - некоторая постоянная, т.е.

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \qquad a \le x \le b,$$

При $x = a$ $\quad F(a) + C = 0,$ или $C = -F(a)$, следовательно

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

При $x = b$, получим

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Формула (17.12) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Примеры. 1. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$

2. $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$

ЛЕКЦИЯ 18. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Оглавление

18.1. Замена переменной

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную на* $[\alpha,\ \beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, *и функция* $f(x)$ *непрерывна* $\forall\ x\in(a,b)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (18.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда сложная функция $\Phi(\varphi(t))$ на интервале $[\alpha,\beta]$ будет первообразной для $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (18.2)$$

С другой стороны

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\varphi(\beta))-\Phi(\varphi(\alpha))=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (18.3)$$

Из равенств (18.2) и (18.3) следует формула (18.1).

Примеры.

1. $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} x^2=t; & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 0 & 4\end{array} \\ 2xdx=dt; & \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int_0^4 e^t dt=\frac{1}{2}e^t\Big|_0^4=\frac{e^4-1}{2}$.

2. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\left\{\begin{matrix} \sqrt{e^x-1}=t,\ x=\ln(1+t^2); & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \ln 2 \\ \hline t & 0 & 1\end{array} \\ dx=2tdt/(1+t^2); & \end{matrix}\right\}=2\int_0^1\frac{t^2dt}{1+t^2}=$

$$= 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2(t - arctg\,t)\Big|_0^1 = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-\pi}{2}.$$

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, ввиду того, что изменяются пределы интегрирования, в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования.

18.2. Интегрирование по частям

Теорема. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{18.4}$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$, то

$$\int_a^b (u\,v)'\,dx = \int_a^b (u'\,v + u\,v')dx = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv. \tag{18.5}$$

В соответствии с формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b (u\,v)'\,dx = [u\,v]\Big|_a^b \tag{18.6}$$

Сравнивая (18.5) и (18.6), получим, что

$$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b, \tag{18.7}$$

или

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{18.8}$$

Пример. Вычислить $\int_1^2 \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = x \end{matrix}\right\} = (x\ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x\,dx}{x} = 2\ln 2 - \ln 1 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

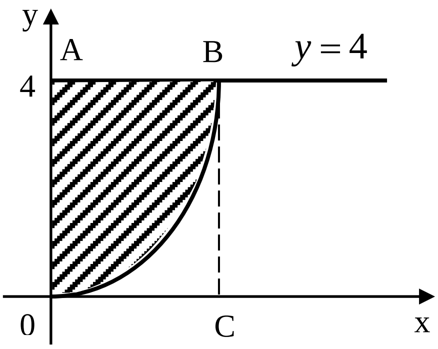


Рис.18.

18.3. Геометрические приложения определенного интеграла

18.3.1. Вычисление площадей

В соответствии с геометрическим смыслом, определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$. При этом, в зависимости от расположения графика $f(x)$ перед интегралом должен стоять знак «плюс», или «минус» (см. рисунки 18.1-18.4).

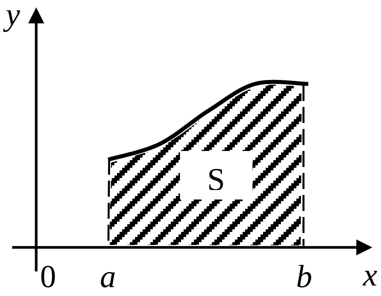


Рис.18.1

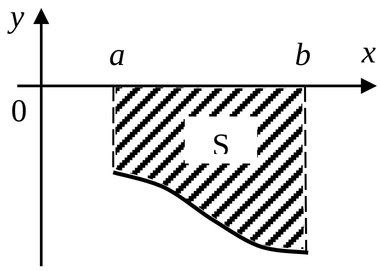


Рис.18.2

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx \qquad S=-\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$S=S_1+S_2=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_c^b f(x)dx. \qquad S=\int\limits_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

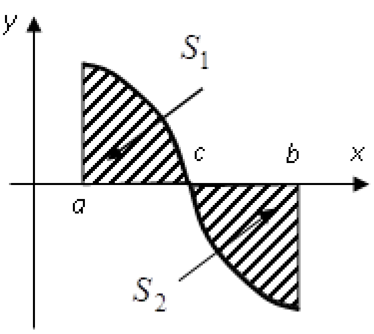


Рис.5.3

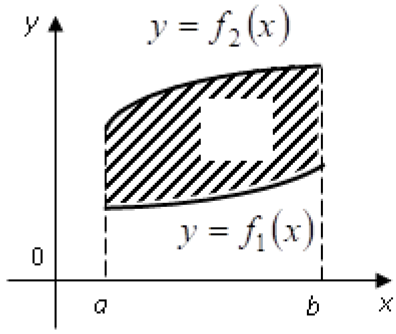


Рис.5.4

Примеры.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$; $y=4$; $x=0$.
Решение.

Сделаем чертеж (рис.18.5).
Из чертежа видно, что
$S = S_{OABC} - S_{OBC}$.
Найдем границы интегрирования:
$y = 4$; $y = x^2$; $x^2 = 4$; $x = 2$.

$$S = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24-8}{3} = \frac{16}{3}$$ (ед2.).

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = -x^2$; $y = x - 2$; $y = 0$.

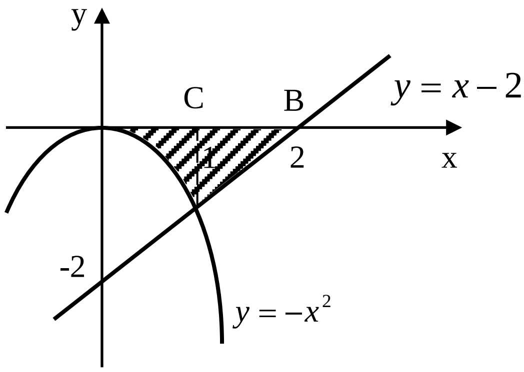


Рис.18.6

Решение.
Сделаем чертеж (рис.18.6).
Найдем абсциссы точек C и B.

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

$-x^2 = x - 2$; $x^2 + x - 2 = 0$;

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$ (x_2 не подходит).

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = x - 2. \end{cases} \qquad x = 2.$$

Значит, $x_C = 1$, $x_B = 2$.

$$S = -\int_0^1 \left(-x^2\right)dx - \int_1^2 (x-2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{(x-2)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$ (ед.2).

18.3.2. Вычисление объема тела вращения

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана знакопостоянная функция $y = f(x)$. Необходимо вычислить объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (см. рис.18.7).

Разобьем $[a, b]$ на элементарные отрезки точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

На каждом из отрезков разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ выберем точку ξ_i $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

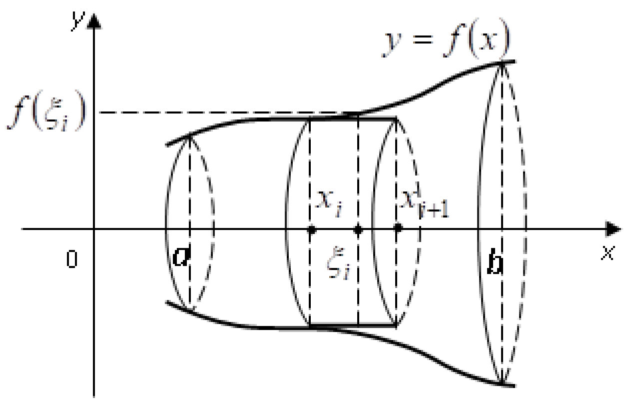


Рис.5.7

Тогда некоторым приближением искомого объема будет сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (18.9)$$

а за искомый объем естественно взять предел :

$$V_x = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (18.10)$$

где $\max \Delta x_i$ – максимальная из длин отрезков разбиения $(i = 1,2,...,n)$.

Выражение в правой части формулы (18.10) есть предел интегральной суммы для функции $\pi f^2(x)$, поэтому

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx . \qquad (18.11)$$

Примеры.

1. Вычислить объем V шара радиуса R.

   Решение.

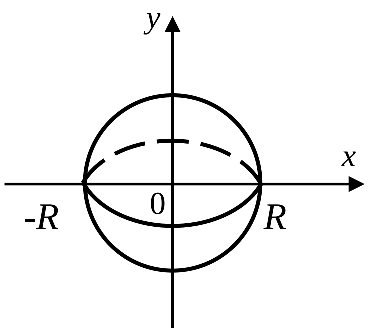


Рис.18.8

Рассмотрим шар как тело, образованное вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси *ox* (см.рис.18.8.). По формуле (18.11) получим

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi\left(\int_{-R}^{R} R^2 dx - \int_{-R}^{R} x^2 dx\right) =$$

$$= \pi\left(R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}\right) = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (ед}^3\text{.).}$$

2. Вычислить объем V тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox.

Решение.

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}36 \ (\text{ед}^3.)$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить определенные интегралы.

5.1 $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$; 5.2 $\int\limits_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; 5.3 $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

5.4 $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x dx$; 5.5 $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; 5.6 $\int\limits_0^1 \ln(1+x)dx$;

5.7 $\int\limits_0^{\ln 5} xe^{-x}dx$; 5.8 $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$; 5.9 $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций :

5.10 $y=\sqrt{x},\ y=2-x,\ y=0;$

5.11 $y=1/x,\ y=x,\ x=2;$

5.12 $y=x^2-2x+3,\ y=3x-1;$

5.13 $y=x^2,\ y=1+(3/4)x^2;$

5.14 $y=-x^2,\ y=2e^x,\ x=0,\ x=1;$

5.15 $y=\ln x,\ x=e,\ y=0.$

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

5.16 $y=4-x^2,\ y=0,\ x=0,$ где $x\geq 0$;

5.17 $y=e^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0;$

5.18 $y=x^2+1,\ y=0,\ x=1,\ x=2;$

5.19 $y=x^3,\ y=1,\ x=0;$

5.20 $x=y^2-2,\ y=x.$

ЛЕКЦИЯ 19. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Оглавление

До сих пор рассматривались интегрируемые функции на конечном отрезке $[a, b]$. При этом было установлено, что достаточным условием интегрируемости есть непрерывность функции на $[a, b]$.

В этом параграфе обобщим понятие определенного интеграла от функций или не ограниченных на отрезке интегрирования, либо заданных на неограниченных отрезках.

19.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть задана функция $y = f(x)$ на полуинтервале $x \in [a, +\infty)$.

Определение. ***Несобственным интегралом*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется предел*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)dx \tag{19.1}$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (19.1) существует и конечный, то несобственный интеграл называется *сходящимся,* если не существует, или бесконечный, то – *расходящимся*.

При изучении несобственных интегралов выясняют вопрос о сходимости и вычислении, если интеграл сходится.

С помощью несобственных интегралов на основании геометрического истолкования определенного интеграла иногда удается вычислить площадь полубесконечной (или бесконечной) фигуры.

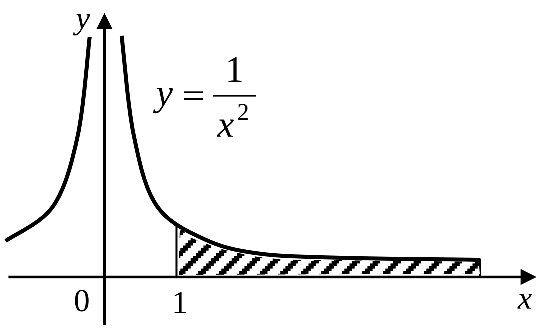


Рис.19.1

Пример. Вычислить $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

По определению

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to+\infty} \int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^N =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1.$$

Следовательно, площадь заштрихованной на рисунке 19.1 полубесконечной фигуры равна 1.

Аналогично формуле (19.1) определяются несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^a f(x)dx; \qquad (19.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N_1\to-\infty} \int_{N_1}^{a} f(x)dx + \lim_{N_2\to+\infty} \int_a^{N_2} f(x)dx. \qquad (19.3)$$

Пример. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$.

Решение.

Воспользуемся формулой (19.3). Положим $a = 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_0^{+\infty} e^x\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{N_1\to-\infty} \int_{N_1}^{0} e^x\,dx = \lim_{N_1\to-\infty} e^x\Big|_{N_1}^{0} = \lim_{N_1\to-\infty} \left(e^0 - e^{N_1}\right) = 1.$$

Т.е. первый из интегралов сходится и равен 1.

$$\int_0^{+\infty} e^x\,dx = \lim_{N_2\to+\infty} \int_0^{N_2} e^x\,dx = \lim_{N_1\to-\infty} e^x\Big|_0^{N_2} = \lim_{N_2\to+\infty} \left(e^{N_2} - e^0\right) = +\infty.$$

Поскольку второй из суммы двух интегралов расходится, то, следовательно, расходится $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$.

19.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a,b)$.

Определение. ***Несобственным интегралом*** $\int_a^b f(x)dx$ *от неограниченной функции* $f(x)$ *на полуинтервале* $[a,b)$ *называется предел*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx. \tag{19.4}$$

Если предел, стоящий в правой части (19.4) существует и конечный, то интеграл называется *сходящимся*, иначе – *расходящимся*.

Аналогично вводятся понятия несобственных интегралов:

– от функции $y = f(x)$, неограниченной на $(a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx, \tag{19.5}$$

– от функции, терпящей разрыв в некоторой внутренней точке $c \in [a,b]$**:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx. \tag{19.6}$$

Пример. Выяснить, при каких α сходится, а при каких – расходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \to +0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & при\ \alpha < 1, \\ +\infty & при\ \alpha \ge 1. \end{cases}$$

19.3. Экономические приложения определенного интеграла

Как известно, экономический смысл определенного интеграла – объем Q производственной продукции при известной функции $f(t)$ производительности труда за промежуток времени T:

$$Q = \int_0^T f(t)dt. \tag{19.7}$$

Если считать, что затраты труда в процессе производства некоторой продукции линейно зависят от времени, а затраты капитала неизменны, то функция, характеризующая производительность труда (т.н. функция Кобба-Дугласа) имеет вид

$$g(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t},$$

а объем выпускаемой продукции за период времени T составит

$$Q=\int_0^T(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}\,dt. \qquad (19.8)$$

Пример. Найти объем продукции, произведенный за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $g(t)=(1+t)e^{3t}$.

Решение.

По формуле объем Q произведенной продукции равен

$$Q=\int_0^4(1+t)e^{3t}\,dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u=t+1$ $dv=e^{3t}\,dt$. Тогда $du=dt$, $v=\int e^{3t}\,dt=\frac{1}{3}e^{3t}$.

Следовательно,

$$Q=(t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{1}{3}e^{3t}\,dt=\frac{1}{5}\left(5e^{12}-1\right)-\frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4=\frac{1}{9}\left(14e^{12}-2\right)\approx 2{,}53\cdot 10^5 \text{ (усл.ед.)}.$$

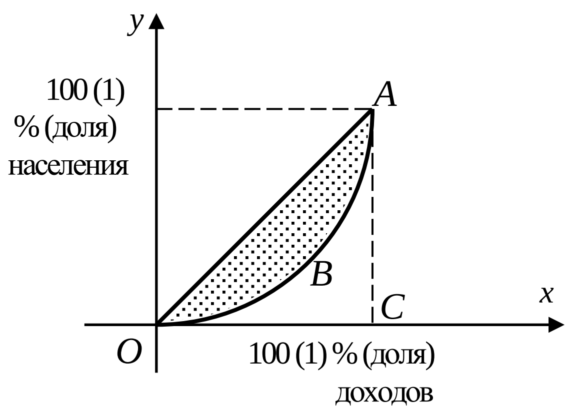


Рис.19.

Исследуя кривую Лоренца – зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривую OBA). Мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису OA, поэтому площадь фигуры OAB между биссектрисой OA кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника OAC (коэффициент Джини), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

Пример. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца *OBA* (рис.19.2) может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где *x* – доля населения, *y* – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение.

Очевидно, коэффициент Джини (см. рис.19.1)

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2\,S_{OBAC}, \text{ так как } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Поэтому $k = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx - 1$.

С помощью замены, например, $x = \sin t$ можно вычислить

$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$. Итак, коэффициент Джини $k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$.

Достаточно высокое значение *k* показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время *t* (лет) при годовом проценте (процентной ставке) *p* называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t – конечная сумма, полученная за *t* лет, и *K* – дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной* суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1 + i\,t)$, где $i = p/100$ – удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1 + i\,t)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1 + i\,t)^t$ и потому $K = K_t/(1 + i)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной *i*, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt.$$

Пример. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млрд. грн., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млрд. грн.

Решение.

Очевидно, что капиталовложения задаются функций $f(t)=10+1\cdot t=10+t$. Тогда по формуле дисконтированная сумма капиталовложений $K=\int\limits_0^3 (10+t)e^{-0,08t}dt$.

Интегрируя, получим $K=30{,}5$ млрд. грн. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млрд. грн. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млрд. грн. при той же, начисляемой непрерывно процентной ставке.

Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Тогда *среднее время* t_{cp}, затраченное *на изготовление одного изделия в период освоения* от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp}=\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} t(x)dx .$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t=t(x)$, то часто она имеет вид

$$t=ax^{-b},$$

где a – затраты времени на первое изделие, b – показатель производственного процесса.

Пример. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1=100$ до $x_2=121$ изделий, полагая в формуле $a=600$ (мин.), $b=0{,}5$.

Решение.

Используя формулу, получаем

$$t_{cp}=\frac{1}{121-100}\int\limits_{100}^{121} 600\,x^{-1/3}dx=\frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121}=\frac{400}{7}\approx 57{,}2 \text{ (мин.)}$$

УПРАЖНЕНИЯ.

Вычислить, или установить расходимость несобственных интегралов:

6.1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$,

6.2. $\int\limits_1^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$,

6.3. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}\, dx$,

6.4. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$,

6.5. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$,

6.6. $\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

ЛЕКЦИЯ 20. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Оглавление

20.1. Функции нескольких переменных. Основные понятия

Определения. *Пусть заданы* n *переменных величин, и пусть каждому набору их знаний* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ *соответствует одно вполне определенное значение переменной величины* Z. *Тогда говорят, что задана функция* $Z = F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Аналогично тому, как в случае с одной переменной $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными (аргументами), F означает закон соответствия, X - областью определения.

В случае функции двух переменных будем писать $Z = F(x, y)$, в случае функции трех переменных: $u = F(x, y, z)$.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ .$$

Решение. Область определения задается условием неотрицательности подкоренного выражения: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq 1$, т.е. представляет собой круг радиуса 1 с центром в $O(0;0)$.

Рассмотрим примеры функций нескольких переменных.

1. $V = \pi R^2 H$ - функция двух переменных: $x_1 = R, x_2 = H$, задается объем цилиндра V с радиусом основания R и высотой H.
2. $z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, где $a_1, a_2, ..., a_n, b$ - постоянные числа. Эта функция называется линейной функцией n переменных.
3. $z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2$ - квадратическая форма, функция n переменных.

4. В экономике применяется производная функция, которая выражает результат производственной деятельности в зависимости от обусловивших её факторов $x_1, x_2, ..., x_n$

В частном случае, при $n = 2$ такая функция имеет вид

$$z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \tag{20.1}$$

где z-величина общественного продукта, x_1-затрата труда, x_2-объём производственных фондов, b_0, b_1, b_2-коэффициенты. Функция (20.1) называется функция *Кобба-Дугласа.*

Рассмотрим функцию двух переменных $z = F(x, y)$.

Её областью определения X есть подмножество точек координатной плоскости Oxy.

Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0) \in X$ называется круг, содержащий точку M_0.

Графиком функции двух переменных $z = F(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства $(x, y, F(x, y))$, которые представляют собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Для построения графика функции $z = F(x, y)$ используют *метод сечения плоскостями*, параллельными координатами, т.е. плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. При этом рассматриваются функции одной переменной $z = F(x_0, y)$, $z = F(x, y_0)$ и $z_0 = F(x, y)$.

Пример 2. Построить график функции $z = x^2 + y^2$.

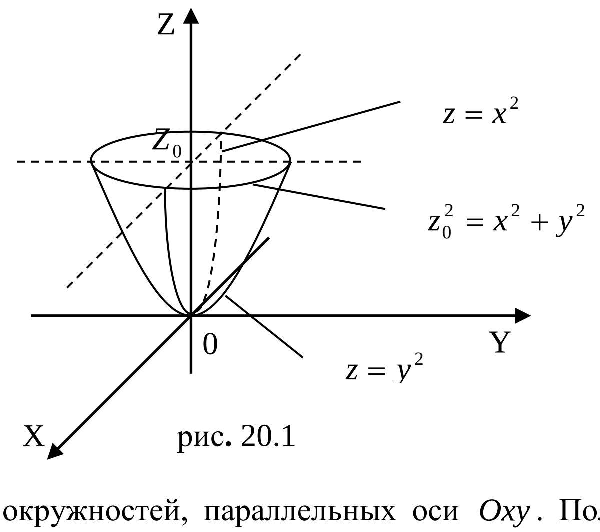


рис. 20.1

Решение. При $x = x_0$ $z = x_0^2 + y^2$, в частности, при $x = 0$, $z = y^2$.

При $y = y_0$ $z = x^2 + y_0^2$, в частности при $y = 0$ $z = x^2$.

В указанных случаях получаются параболы параллельные координатным плоскостям Oyz, Oxz. При $z = z_0$ получаем $z_0 = x^2 + y^2$ $(z_0 \geq 0)$- семейство окружностей, параллельных оси Oxy. Полученный график изображен на рис. 20.1, он представляет собой поверхность, называемую *параболоидом*.

Определение. ***Линией уровня*** *функции двух переменных* $z = f(x, y)$ *называется множество точек на плоскости, таких что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно* C.

В приведенном выше примере линиями называются окружности $x^2 + y^2 = z_0$, радиуса $\sqrt{z_0}$ с центром в точке $(0,0,z_0)$.

20.2. Предел, непрерывность, производные функций нескольких переменных

Определение. *Число* A *называется* ***пределом функции*** $z = F(x, y)$ *при* $x \to x_0$, $y \to y_0$ *(или в точке* (x_0, y_0)*), если же любого сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *, найдется положительное число* $\delta > 0$ *(зависящее от* $\varepsilon : \delta = \delta(\varepsilon)$*), такое, что для всех точек* (x, y)*, отстоящие от* (x_0, y_0) *на расстояние* $\rho < \delta$*, выполняется неравенство*

$$|F(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x, y) = A$.

Примеры. Найти пределы функций нескольких переменных.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \dfrac{(1 + \ln x)y}{x}$; 2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Решение.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \dfrac{(1 + \ln x)y}{x} = \dfrac{(1 + \ln 1)1}{1} = 1;$

2. $$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{ \begin{matrix} \text{пусть } x^2 + y^2 = \rho, \\ \text{тогда } \rho \to 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{\rho \to 0} \frac{(\ln(1 - p^2))'}{(\rho)'} =$$
$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{2p/(1 - p^2)}{1} = 0.$$

Определение. *Функция* $z = F(x, y)$ *называется* ***непрерывной*** *в точке* (x_0, y_0) *если она:*

1) *определена в* (x_0, y_0)*, т.е. существует* $F(x_0, y_0)$*;*

2) *имеет конечный предел* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x, y) = A$*;*

3) $F(x_0, y_0) = A$.

Функция $F(x, y)$, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в области.

Геометрический смысл непрерывности состоит в том, что график в точке (x_0, y_0) представляет собой сплошную не расслаивающуюся поверхность.

Рассмотрим функцию $z = F(x, y)$, непрерывную в некоторой области D. Дадим её аргументам некоторые приращения: $\Delta x, \quad \Delta y$. Тогда получим следующие приращения функции:

- $\Delta z = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$ - полное приращение функции $F(x, y)$ в точке (x, y);
- $\Delta_x z = F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$ - частное приращение по x функции $F(x, y)$ в точке (x, y);
- $\Delta_y z = F(x, y + \Delta y) - F(x, y)$ - частное приращение по y функции $F(x, y)$ в точке (x, y).

В общем случае $\Delta z \neq \Delta_z x + \Delta_z y$, действительно, например, для функции $z = xy$:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y \cdot \Delta x; \; \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y;$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y.$$

Получено, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Определение. ***Частной производной функции нескольких переменных*** *по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если такой предел существует).*

Например, для функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}; \tag{20.2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \tag{20.3}$$

Встречаются другие обозначения частных производных:

$$z_x', \, z_y' \text{ или } f_x'(x, y), \; f_y'(x, y).$$

Из определения частных производных следует, что для нахождения z_x' переменную y надо считать постоянной, а для нахождения z_y' - переменную x.

Правила дифференцирования при этом сохраняются.

Примеры. Найти частные производные функций:

а) $z = x\ln y + \dfrac{y}{x}$ б) $z = x^y$.

Решение.

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x}$.

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

Если частные производные $z_x' = f_x'(x,y)$ и $z_y' = f_y'(x,y)$ являются дифференцируемыми функциями. То можно найти их частные производные, которые называют *частными производными второго порядка.* Так, например, для $z = f(x,y)$ имеем:

$$z_x' = f_x'(x,y),\ z_{xx}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x'(x,y)\right);\ z_{xy}'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x'(x,y)\right);$$

$$z_y' = f_y'(x,y),\ z_{yy}'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_y'(x,y)\right);\ z_{yx}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_y'(x,y)\right).$$

Можно доказать, что если частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$ непрерывны в некоторой точке (x_0, y_0), то в этой точке $f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0)$.

Пример . Найти частные производные второго порядка функции $z = x^2 + \ln y - \ln x$.

Решение.

$$z_x' = 2x - \frac{1}{x}; \quad z_y' = \frac{1}{y};$$

$$z_{xx}'' = 2 + \frac{1}{x^2}; \quad z_{xy}'' = 0;$$

$$z_{yy}'' = -\frac{1}{y^2}; \quad z_{yx}'' = 0.$$

20.3. Дифференциал функции нескольких переменных

Определение. ***Дифференциалом*** *функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:*

$$dz = z_x' \cdot \Delta x + z_y' \cdot \Delta y \tag{20.4}$$

Пусть $f(x,y) = x$; тогда $df(x,y) = dx = \Delta x$;

$g(x,y) = y$; тогда $dg(x,y) = dy = \Delta y$.

Тогда $dz = z_x' \cdot dx + z_y' \cdot dy$; (20.5) или $\quad dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$.

Определение. *Функция* $z = f(x, y)$ *называется* ***дифференцируемой*** *в точке* (x, y), *если её полное приращение может быть представлено в виде*

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \,, \tag{20.6}$$

где dz - *дифференциал функции,* $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ - *бесконечно малые при* $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Таким образом, как и в случае одной переменной дифференциал функции нескольких переменных, есть главная, линейная относительно приращений Δx и Δy, часть полного приращения функции.

Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных формируется следующей теоремой.

Теорема. *Если частные производные* $z'_x(x, y)$ *и* $z'_y(x, y)$ *существуют в окрестности некоторой точки* (x, y) *и непрерывны в самой этой точке* (x, y), *то функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = x^3 y^2 - 2xy^3$;   б) $z = \ln(x^2 + 2y^3)$;

2. Найти полные дифференциалы функций:

а) $z = (1 + x^2)^y$;   б) $z = (x - \frac{1}{y})e^{-x^2 y}$;

в) $z = \ln\frac{x + \sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{x^2 + 1}}$;   в) $z = (\ln y)^x$.

ЛЕКЦИЯ 21. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Оглавление

21.1. Производная сложной функции. Производная по направлению. Градиент

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, определённая в некоторой области G, дифференцируемая в некоторой точке $(x, y) \in G$, а функции

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),$$

зависящие от параметра t, имеют производные по t.

Тогда производная по t от сложной функции

$$z = f\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]$$

вычисляется по формуле: $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{d\psi}{dt}$ (21.1)

Пример. Найти производную сложной функции $z = x^2 + y^2$, *где* $x = \cos(t);\ \ y = \dfrac{1}{t};$

Решение. Воспользуемся формулой (21.1):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot \left(-\sin(t)\right) + 2y \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = -2\sin(t)\cos(t) - \frac{2}{t^3} = -\sin(2t) - \frac{2}{t^3}.$$

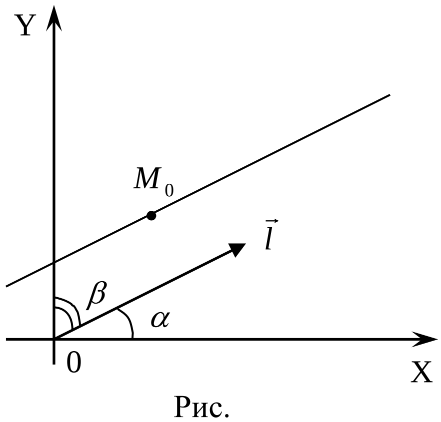


Рис. 21.1

Рассмотрим единичный вектор $\vec{l} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$ произвольного направления, где α и β - углы, образуемые вектором $\vec{l}$ с координатными осями (см.рис.21.1).

Пусть задана некоторая прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ параллельно вектору $\vec{l}$. Её уравнение в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta. \end{cases} \qquad (21.2)$$

Для точек выбранной прямой функция $z = f(x,\ y)$ является функцией одной переменной:

$$z = f\left(x_0 + t\cos\alpha,\ \ y_0 + t\cos\beta\right) = z(t), \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (21.3)$$

Определение. *Производной функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по направлению вектора* $\vec{l}$ *называется производная функции* $z(t)$ *по* t *при* $t = 0$ *(если она существует) и обозначается* $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Дифференцируя (21.3) по t по правилам дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta \qquad (21.4)$$

Определение. ***Градиентом*** *функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *называется вектор*

$$\overrightarrow{\nabla z} = \left\{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x};\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right\}. \qquad (21.5)$$

Сравнивая (21.4) и (21.5) нетрудно заметить, что производная по направлению есть скалярное произведение градиента $\overrightarrow{\nabla z}$ и единичного вектора $\bar{l} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$, задающего направление l. Действительно,

$$(\overrightarrow{\nabla z}, \vec{e}) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\vec{j}\right)\left(\cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j}\right) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta = \frac{\partial z}{\partial l}$$

В соответствии с физическим смыслом производная $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции в направлении l.

С другой стороны известно, что скалярное произведение двух векторов максимально, если они направлены одинаково.

Отсюда следует, что градиент функции $\overrightarrow{\nabla z}$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Примеры.

1. Найти градиент функции $z = xy^{-1} + \dfrac{y^2}{2}$ *в точке* $M_0(2; 1)$. Вычислить его направление и величину.

Решение.

$$\overrightarrow{\nabla z}(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\vec{j};\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y};\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + y;\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{-2}{1^2} + 1 = -1;$$

$$\overrightarrow{\nabla z}(M_0) = \{1; -1\},\ \left|\overrightarrow{\nabla z}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{np_{OX}\overrightarrow{\nabla z}(M_0)}{\left|\overrightarrow{\nabla z}(M_0)\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\beta = \frac{np_{OY}\overrightarrow{\nabla z}(M_0)}{\left|\overrightarrow{\nabla z}(M_0)\right|} = \frac{-1}{\sqrt{2}};$$

2. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $M_0(1;\ 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1(3;\ 0)$.

Решение.

Определим единичный вектор $\vec{l}$ заданного направления $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$\overrightarrow{M_0M_1} = \{3-1;\ 0-2\} = \{2;\ -2\}$; $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$;

$$\vec{l} = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j};$$

Значит $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдём частные производные функции z в точке M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2;\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 2\cdot 1 + 2^2 = 6;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy;\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 2\cdot 1\cdot 2 = 4.$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial l} = 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

21.2. Экстремум функции нескольких переменных

Определение. Точка $A(x_0, y_0)$ называется точкой минимума (максимума) функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки A, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$). На рисунке 21.2 изображена точка максимума A.

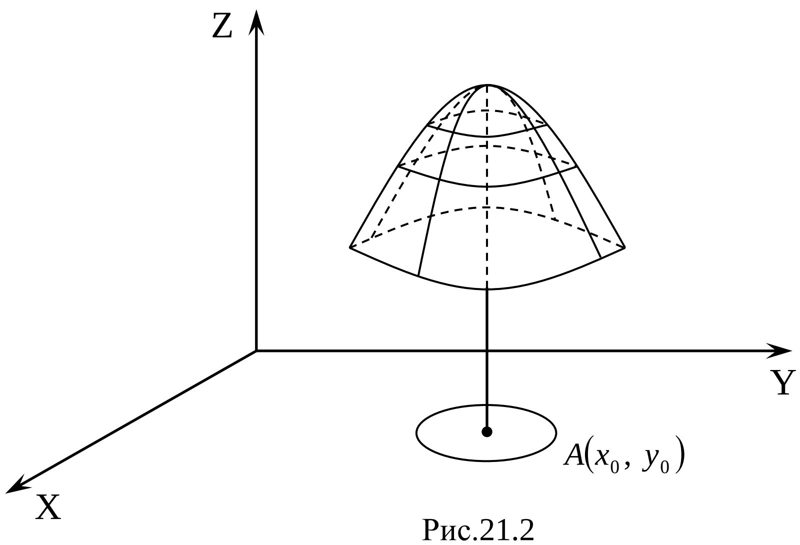


Рис.21.2

Следует иметь в виду, что одна и таже функция может иметь в своей области определения несколько экстремумов. При этом в каждом конкретном случае речь может идти о *локальном* экстремуме.

Необходимое условие экстремума формулирует следующая теорема.

Теорема. *Пусть* (x_0, y_0) *- точка экстремума дифференцируемой функции* $z = f(x, y)$. *Тогда частные производные* $f'_x(x_0, y_0)$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$ *в этой точке равны нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A(x_0, y_0)$ - точка максимума. Зафиксируем одну из переменных, например $y = y_0$. Тогда получим функцию одной переменной $z = f(x_0, y_0)$. Очевидно, что при $x = x_0$ $f(x_0, y_0)$ имеет максимум. Но тогда $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично можно показать, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в которых $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, называют *критическими* или *стационарными.*

Заметим, что равенство нулю частных производных не является достаточным условием существования экстремума.

Достаточные условия экстремума функции двух переменных формулируются следующей теоремой.

Теорема. *Пусть функция* $z = f(x, y)$*:*

а) определена в окрестности некоторой критической точки (x_0, y_0)*;*

б) в этой точке существуют непрерывные частные производные второго порядка $f''_{xx}(x_0, y_0) = A,\ f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B,\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Тогда, если $\Delta = AC - B^2 > 0$, *то в* (x_0, y_0) *функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум, причём если* $A > 0,$ *то* $\min,$ $A < 0,$ *то* $\max$.

Если $\Delta < 0$, *то экстремума в этой точке нет. Если* $\Delta = 0$, *то вопрос остаётся открытым.*

Исследование на экстремум функции двух переменных рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти частные производные первого порядка $z'_x,\ z'_y$.
2. Найти критические точки, как решение системы $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$.
3. Вычислить частные производные второго порядка и с помощью достаточного признака найти точки $\max$ *и* $\min$.

4. Найти экстремумы функции, т.е. максимальные и минимальные значения.

Пример. Исследовать на экстремум функцию: $z = (y - x)^2 + (y + x)^2$.

Решение.

1. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2(y - x) + 2(y + x) = 4x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(y - x) + 2(y + x) = 4y.$$

2. Находим критические точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \text{Значит } M(0;\ 0) \text{ - критическая точка.}$$

3. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 16 > 0;$ *т.к.* $A = 4 > 0$, то M - точка минимума. $z_{\min} = z(M) = 0$.

21.3. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций нескольких переменных на некотором замкнутом множестве осуществляется аналогично тому, как в случае с функцией одного переменного: эти значения достигаются или в точках экстремума или на границе области. При этом следует в функцию $z = f(x, y)$ подставить уравнение $y = \varphi(x)$ границы области и искать наибольшее и наименьшее значение функции одного переменного $z = f(x,\ \varphi(x))$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2}$ на круге радиуса 1 с центром вначале координат.

Решение.

1. Найдём частные производные, критические точки и значения в них:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{(1 + y^2)^2}. \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \quad M_0(0;\ 0) \text{ - критическая точка.}$$

$z_0(M_0) = 2$.

2. Уравнение границы области имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$. Подставим $y^2 = 1 - x^2$ в функцию:

$$z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+1-x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2-x^2} = \frac{3}{2+x^2-x^4}\,.$$

Имеем функцию одного переменного: $z = \dfrac{3}{2+x^2-x^4}$, $x \in [-1;\ 1]$.

3. Найдём наибольшее и наименьшее значения этой функции на указанном интервале.

$z' = \dfrac{2x(2x^2-1)}{(2+x^2-x^4)^2}$; $z' = 0$ в точках $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$z_1(0) = \dfrac{3}{2}$; $z_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z_3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3}$; $z_5(-1) = \dfrac{3}{2}$; $z_6(1) = \dfrac{3}{2}$.

Выбираем среди точек z_i, $i = \overline{1;6}$ наибольшее и наименьшее.

Итак,

$z_{наиб} = z(0;0) = 2$. $z_{наим} = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти градиент $\overrightarrow{\nabla z}$ заданной функции в точке M_0. Вычислить его величину и направление.

   а) $z = x^2 + y^2$; $M_0(3;\ 2)$. б) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$; $M_0(2;\ 1)$. в) $z = arctg\dfrac{y}{x}$; $M_0(1;\ 1)$.

2. Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $M_0(3;\ 4)$.

3. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке $M_0(3;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(6;\ 5)$.

4. Найти скорость изменения функции $z = arctg(xy)$ в точке $M(1;\ 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

ЛЕКЦИЯ 22. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Оглавление

22.1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка

В приложениях математики к техническим, экономическим и естественным наукам особое место занимают дифференциальные уравнения. Многие процессы с их помощью описываются полнее и проще. С помощью дифференциальных уравнений можно строить математические модели многих финансово-экономических процессов.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее неизвестную функцию, независимые переменные и производные (или дифференциалы) от неизвестной функции по этим переменным. Так, например, $y' - 2xy = 3x$, $xd^2y - y(dx)^2 = \ell^y dxdy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x\frac{\partial u}{\partial y}$ – дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если неизвестная функция зависит только от *одного* аргумента (в двух первых примерах) и *в частных производных*, если неизвестная функция зависит от *нескольких* независимых переменных (третий пример). Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения (по этой причине слово «обыкновенное» будет опускаться).

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящих в это уравнение. Так в приведенных примерах первое дифференциальное уравнение первого порядка, второе – второго порядка, а уравнение $xy^{IV} - 2x^2y' = 5$ – четвертого порядка.

В общем случае дифференциальное уравнение n-го порядка записывают в виде

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (22.1)$$

где F – некоторая заданная функция от $n+2$ переменных или в виде *разрешенном относительно старшей производной*,

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right) \qquad (22.2)$$

здесь f – заданная функция от $n+1$ переменной.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале (a,b) называется функция , определенная на (a,b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно и такая, что ее подстановка в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество по x на (a,b). *Проинтегрировать* дифференциальное уравнение – значит найти все решения, удовлетворяющие этому уравнению.

Общим решением дифференциального уравнения (22.1) называется решение

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2,..., C_n\right) \qquad (22.3)$$

содержащее столько произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, каков порядок уравнения. Эта же функция, записанная в неявном виде

$$\psi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \qquad (22.4)$$

называется *общим интегралом* дифференциального уравнения (22.1).

Частным называется решение, получаемое из общего решения (22.3) при определенном выборе значений произвольных постоянных $C_1, C_2, .., C_n$. Соотношение, получаемое из общего интеграла (22.4) при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ называется частным интегралом дифференциального уравнения (22.1).

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$y' = 2x$.

Решение. Это дифференциальное уравнение первого порядка. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, где в правой части равенства стоит отношение дифференциалов, после подстановки которых в уравнение получаем

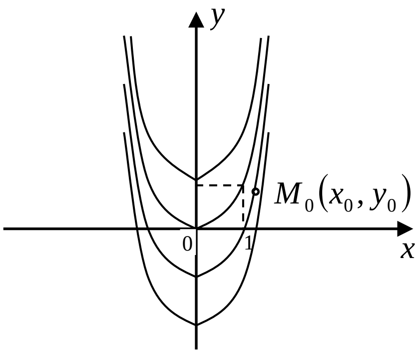


Рис.22.1

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2xdx \Rightarrow \int dy = \int 2xdx \Rightarrow y = x^2 + C$$ –

общее решение исходного уравнения. Очевидно, что общее решение этого уравнения является (см. рис.22.1) однопараметрическим семейством парабол (через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$плоскости XoY проходит единственная интегральная кривая семейства $y = x^2 + C$,соответствующая определенному выбору C, так называемое частное решение).

22.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (22.5)$$

или в виде разрешенном относительно производной

$$y' = f(x, y), \qquad (22.6)$$

или в симметричной форме

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (22.7)$$

где F, f, M, N – заданные функции своих аргументов.

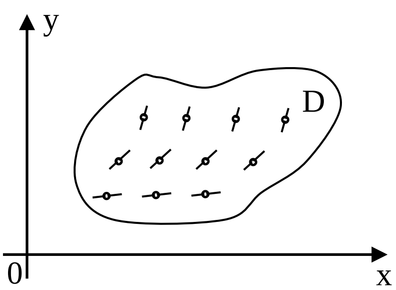


Рис.22.2

Для дифференциального уравнения первого порядка имеют место введенные в п. 22.1 понятия решения, общего и частного решения, общего и частного интегралов. С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y = \varphi(x, C_1)$ представляет собой однопараметрическое семейство интегральных кривых (см. пр.1). Частное решение – единственная интегральная кривая из семейства, соответствующая определенному значению параметра C_1.

Рассмотрим геометрический смысл уравнения (22.6). Пусть функция $y = y(x)$ является решением уравнения (22.6). Из геометрического смысла производной, вычисленной в точке x_0, следует, что $y'(x_0) = tg\alpha_0$ и таким образом само уравнение (22.6) задает в каждой точке области определения уравнения значение углового коэффициента касательной, проведенной в данной точке к интегральной кривой уравнения, причем $tg\alpha_0 = f(x_0, y_0)$. Если в каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ области определения D построить отрезок единичной длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси OX угол α_0, причем $tg\alpha_0 = f(x_0, y_0)$, то говорят, что в области D уравнение (22.6) задает *поле направлений* (см. рис. 22.2).

Геометрическая интерпретация задачи интегрирования уравнения (22.6): найти такое семейство кривых, касательные к которым в каждой точке совпадают с полем направлений, устанавливаемым данным дифференциальным уравнением.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (22.6) называется задача нахождения частного решения этого уравнения, удовлетворяющего заданным *начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \tag{22.8}$$

где x_0, y_0 – заданные числа. С геометрической точки зрения решить задачу Коши значит найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$. Чтобы решить задачу Коши (22.6), (22.8), если уже найдено общее решение $y = \varphi(x, C)$, необходимо в общее решение подставить вместо x и y начальные значения x_0 и y_0 из (22.8)

$$y_0 = \varphi(x_0, C),$$

решить это уравнение относительно C и получить единственное, соответствующее начальным условиям, значение $C = C_0$. Подставив найденное значение C_0 в общее решение $y = \varphi(x, C)$, получим решение задачи Коши

$$y = \varphi(x, C_0). \tag{22.9}$$

При решении задачи Коши возникает вопрос имеет ли уравнение решение, соответствующее выбранным начальным условиям (22.8) и будет ли это решение единственным. Ответ на этот вопрос дает теорема *существования и единственности решения* (приводится без доказательства):

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

и начальное условие $y(x_0) = y_0$, *т.е. точка* (x_0, y_0). *Если в некотором прямоугольнике* $R(a \le x \le b; c \le y \le d)$, *содержащем внутри себя точку* (x_0, y_0) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна по* x *и* y *имеет ограниченную частную производную по* y, *то существует единственное решение* $y = y(x)$ *этого уравнения, определенное в интервале* $a \le x \le b$ *и принимающее при* $x = x_0$ *значение* $y(x_0) = y_0$.

Решение, в каждой точке которого нарушается условие единственности решения задачи Коши, называется *особым*. Это решение не содержится в формуле общего решения ни при каком значении произвольной постоянной C (даже если $C \to \pm\infty$). Его нужно искать среди тех точек, в окрестности которых $f_y'(x, y)$ становится неограниченной. Особые решения можно обнаружить и в процессе интегрирования данного уравнения, учитывая решения, которые могут быть утеряны при преобразованиях данного дифференциального уравнения, выполняемых в процессе нахождения его общего решения.

22.3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \qquad (22.10)$$

в котором $P(x)$ и $Q(y)$ – коэффициенты при dx и dy – являются непрерывными функциями зависящими, соответственно, только от x и только от y, называются *уравнениями с разделенными переменными*. Общий интеграл уравнения находим почленным интегрированием

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C. \qquad (22.11)$$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$x^2 dx + (y+1)dy = 0,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$.

Решение. Интегрируя уравнение почленно, получаем общий интеграл уравнения

$$\int x^2 dx + \int (y+1)dy = C \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} = C.$$

Полагая в последнем равенстве $x = 0, y = 1$ находим C:

$0 + 2 = C \Rightarrow C = 2$

Частный интеграл принимает вид

$\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{2} = 2$ или $2x^3 + 3(y+1)^2 = 12$.

Замечание. Особенностью дифференциального уравнения с разделенными переменными является то, что все дальнейшие методы решения дифференциальных уравнений первого порядка будут состоять в искусстве сведения этих уравнений к уравнению с разделенными переменными.

Дифференциальное уравнение вида

$$X_1(x)\cdot Y_1(y)dx + X_2(x)\cdot Y_2(y)dy = 0 \qquad (22.12)$$

в котором коэффициенты при dx и dy представляют собой произведение двух непрерывных функций из которых одна зависит только от одной, вторая только от другой переменной, называют *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*. Разделим дифференциальное уравнение (22.12) на произведение членов «мешающих» соответственно интегрированию по x и y, т.е. на $Y_1(y)\cdot X_2(x)$. В результате получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0.$$

Интегрируя почленно это уравнение получаем общий интеграл уравнения (22.12)

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = C.$$

Замечание 1. Деление на $Y_1(y)X_2(x)$ может привести к потере частных или особых решений уравнения (22.12), обращающих в ноль произведение $Y_1(y)\cdot X_2(x)$.

Замечание 2. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = X(x)\cdot Y(y), \qquad (22.13)$$

в котором правя часть представляет собой произведение 2-х непрерывных функций каждая из которых зависит только от одной переменной, тоже являются уравнениями с разделяющимся переменными и приводятся к виду (22.12). Действительно

$$\frac{dy}{dx} = X(x)\cdot Y(y) \Rightarrow dy = X(x)\cdot Y(y)dx.$$

Это уравнение вида (22.12). Разделяя переменные, получаем $\left(Y(y) \neq 0\right)$

$$\frac{dy}{Y(y)} = X(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx + C.$$

Пример 3. Найти решения дифференциального уравнения

$y'\sin x - y\cos x = 0$.

Решение. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то, подставляя в уравнение и умножая на dx, получаем

$$\frac{dy}{dx}\sin x - y\cos x = 0 \Rightarrow \sin x dy - y\cos x dx = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными вида (22.12), поэтому делим каждый член уравнения на произведение функций, «мешающих» интегрированию по y и по x соответственно, т.е. на $y\sin x$. При этом мы полагаем, что $\sin x \neq 0$ и $y \neq 0$. Получаем

$$\frac{dy}{y} - \frac{\cos x}{\sin x}dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = 0.$$

Интегрируя, получаем: $\ln|y| - \ln|\sin x| = \ln|C| \Rightarrow y = C\sin x$ – общее решение.

При делении на произведение $y\sin x$ возможна потеря решений дифференциального уравнения, обращающих это произведение в ноль. К таким решениям относятся $y = 0$ и $x = \pi n, n \in Z$. Однако $y = 0$ входит в общее решение (при $C = 0$), а $x = \pi n$ не является решением исходного уравнения вообще. Таким образом, все решения уравнения $y = C\sin x$.

Замечание 3. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c), \tag{22.14}$$

в котором a, b и c постоянные, заменой $z = ax + by + c$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 4. Решить уравнение

$y' = (x + y)^2$.

Решение. Это уравнение вида (22.14), поэтому замена $z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y'$ и $y' = z' - 1$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$z' - 1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow dz = (z^2 + 1)dx$$

$$\frac{dz}{z^2 + 1} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \Rightarrow arctgz = x + C.$$

Так как $z = x + y$, то после подстановки в последнее равенство получаем общий интеграл исходного уравнения

$arctg(x + y) = x + C$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить дифференциальные уравнения:

1.1. $xy' - y = y^3$, Отв. $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$.

1.2. $y - xy' = \left(1 + x^2 y'\right)$, Отв. $y = 1 + \dfrac{Cx}{1+x^2}$.

1.3. $xyy' = 1 - x^2$, Отв. $x^2 + y^2 = \ln\left(Cx^2\right)$.

1.4. $xydx + (x+1)dy = 0$, Отв. $y = C(x+1)e^{-x}$.

1.5. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$, Отв. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}, x = 0$.

1.6. $2x^2yy' + y^2 = 2$, Отв. $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$.

1.7. $yy' + x = 1$, Отв. $y^2 + x^2 - 2x = C$.

1.8. $y' = 10^{x+y}$, Отв. $y = -\lg\left(C - 10^x\right)$.

2. Решить уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

2.1. $y' - y = 2x - 3$, Отв. $2x + y - 1 = Ce^x$.

2.2 $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$, Отв. $5x + 10y + C = 3\ln|10x - 5y + 6|$

2.3. $y + xy' = 1 + xy, y(1) = -1$, Отв. $y = -\dfrac{1}{x}$.

ЛЕКЦИЯ №23. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Оглавление

23.1. Однородные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x,y) \tag{23.1}$$

в котором функция $f(x,y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией своих аргументов измерения* n, если справедливо тождество

$$f(tx,ty) \equiv t^n \cdot f(x,y). \tag{23.2}$$

Например, функция $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ является однородной функцией аргументов x и y измерения два, так как

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - 2txty = t^2\left(x^2 + y^2 - 2xy\right) = t^2 f(x,y).$$

При $n = 0$ имеем однородную функцию нулевого измерения. Например,

$$f(x,y) = \frac{3x+y}{x-4y} \Rightarrow f(tx,ty) = \frac{3tx+ty}{tx-4ty} = \frac{t(3x+y)}{t(x-4y)} = t^0\,\frac{3x+y}{x-4y} = t^0 \cdot f(x,y).$$

Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к решению уравнений с разделяющимися переменными. Пусть дано уравнение (23.1), причем $f(tx,ty) = f(x,y)$. Положив в последнем равенстве $t = \frac{1}{x}$, получим $f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right)$. Из последнего следует вывод, что в однородных уравнениях (23.1) правая часть уравнения является функцией от формальной переменной $\frac{y}{x}$. Замена $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$. Подставляя в (23.1), получаем

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u'x + u = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u\,.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$xdu = \left(f(u) - u\right)dx \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C\,.$$

Вычислив интегралы и сделав обратную замену $u = \frac{y}{x}$ получим общий интеграл уравнения (23.1).

Пример 1. Найти решения уравнения

$$2x^2 y' = x^2 + y^2.$$

Решение. Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка, так как после преобразования $y'=\dfrac{x^2+y}{2x^2}$ функция $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)$ очевидно является однородной функцией измерения нуль. Поэтому замена

$$\frac{y}{x}=u\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u.$$

Тогда $u'x+u=\dfrac{1}{2}\left(1+u^2\right)\Rightarrow\dfrac{du}{dx}x=\dfrac{1}{2}\left(1-2u+u^2\right)\Rightarrow\dfrac{du}{(1-u)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\displaystyle\int\frac{du}{(1-u)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$.

При этом полагаем, что $\left(1-u^2\right)\cdot x\neq 0$. Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{1-u}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

Возвращаемся к функции y, учитывая что $u=\dfrac{y}{x}$. Получаем

$$\frac{x}{x-y}=\frac{1}{2}\ln|x|+C$$ – общий интеграл уравнения.

Уточняем, не потеряно ли решение при разделении переменных (деление на $(1-u)^2x$). Очевидно, что $x=0$ не является решением исходного уравнения. Из $1-u=0$ следует $1-\dfrac{y}{x}=0\Rightarrow y=x$. Проверкой убеждаемся, что $y=x$ является решением, причем особым, которое не следует из общего решения ни при каких значениях C.

Ответ: $x=\left(\dfrac{1}{2}\ln|x|+C\right)(x-y),\quad y=x$.

Замечание 1. Уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{23.3}$$

в котором функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются непрерывными однородными функциями одного и того же измерения тоже является однородным и легко приводится к виду (23.1). Действительно, полагая $N(x,y)\neq 0$, получаем

$$N(x,y)dy=-M(x,y)dx\Rightarrow y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)},\text{ т.е. } y'=f(x,y).$$

При этом функция $f(x,y)=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ является однородной функцией нулевого измерения. В самом деле

$$f(tx,ty)=-\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=-\frac{t^k\cdot M(x,y)}{t^k\cdot N(x,y)}=t^0\cdot\left(-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right)=f(x,y).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$ydy+(x-2y)dx=0.$$

Решение. Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка, так как коэффициенты при dy и dx очевидно являются однородными функциями одного и того же измерения, равного единице. Разрешаем уравнение относительно y', полагая $y\neq 0$, получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{y}\Rightarrow y'=2-\frac{x}{y}.$$

Замена $\dfrac{y}{x}=u\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$. Тогда уравнение запишется

$$u'x+u=2-\frac{1}{u}\Rightarrow\frac{du}{dx}=2-\frac{1}{u}-u\Rightarrow du=-\frac{(u-1)^2}{u}dx\Rightarrow-\frac{u}{(u-1)^2}du=dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\int\frac{u}{(u-1)^2}du=\int dx\Rightarrow\frac{1}{u-1}-\ln|u-1|=x+C.$$

Так как $u=\frac{y}{x}$, то $\frac{x}{y-x}-\ln\left|\frac{y-x}{x}\right|=x+C$ – общий интеграл уравнения. Потерянным при преобразовании является решение $y=x$, которое является особым.

Замечание 2. Уравнения, которые при помощи определенной замены переменных приводятся к однородным, называют *уравнениями, сводящимися к однородным*. К таким уравнениям относятся, например, уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{23.4}$$

где a_i, b_i, c_i – заданные постоянные $(i=1,2)$. Замена

$$\begin{cases}x=t-m,\\ y=t-n,\end{cases} \tag{23.5}$$

где m и n – решения системы уравнений

$$\begin{cases}a_1m+b_1n=c_1,\\ a_2m+b_2n=c_{2,}\end{cases} \tag{23.6}$$

сводит решение уравнения (23.4) к решению однородного уравнения:

$$z'=f\left(\frac{a_1t+b_1z}{a_2t+b_2z}\right).$$

Решив последнее уравнение и сделав обратную замену

$$\begin{cases}t=x+m,\\ z=y+n,\end{cases}$$

получим общий интеграл исходного уравнения (23.4).

23.2. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{23.7}$$

где $P(x), Q(x)$ – заданные непрерывные в рассматриваемой области функции. Рассмотрим некоторые методы интегрирования линейного уравнения.

Метод Эйлера. Идея метода состоит в умножении уравнения (23.7) на так называемый *интегрирующий множитель*

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}, \tag{23.8}$$

где $P(x)$ – коэффициент исходного уравнения. В результате получаем уравнение

$$y'e^{\int P(x)dx}+P(x)y\cdot e^{\int P(x)dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

левая часть которого представляет собой производную произведения. После умножения на dx получаем

$$d\left(ye^{\int P(x)dx}\right)=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Проинтегрировав, получаем общий интеграл

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

или общее решение исходного уравнения

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{23.9}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3.$$

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка в котором $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = x^3$. Строим интегрирующий множитель $\mu(x)$, вычисляя предварительно

$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| = \ln x^2.$$

Тогда $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$. Умножаем исходное уравнение на $\mu(x) = x^2$, получаем

$$y'x^2 + y\cdot 2x = x^5 \Rightarrow d\left(y\cdot x^2\right) = x^5\,dx \Rightarrow \int d\left(yx^2\right) = \int x^5\,dx \Rightarrow yx^2 = \frac{x^6}{6} + C \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}.$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$ – общее решение.

Метод Бернулли. Идея метода состоит в отыскании решения линейного дифференциального уравнения первого порядка в виде произведения двух неизвестных дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$, т.е. в виде

$$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv', \tag{23.10}$$

которые подбираются так, чтобы функция (23.10) была решением уравнения (23.7). Подставляя (23.10) в (23.7), получаем

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \text{ или } v\cdot u' + u(v' + P(x)v) = Q(x). \tag{23.11}$$

Наложим условие на функцию $v(x)$ – она должна быть такой, чтобы содержимое скобки левой части последнего уравнения обращалось в нуль, т.е. она должна быть частным решением уравнения $(C = 0)$

$$v' + P(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x)v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int P(x)dx}.$$

При этом интегрировании полагаем, что произвольная постоянная $C = 0$.
Подставляя найденное значение в уравнение (23.11) получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции $u(x)$

$$e^{-\int P(x)dx}u' = Q(x) \Rightarrow du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \Rightarrow u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ найдены, как решения двух уравнений с разделяющимися переменными. Тогда, учитывая (23.10) общее решение уравнения (23.7) запишется

$$y = u\cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{23.12}$$

Пример 4. Решить уравнение

$$xy' - 3y = x^2.$$

Решение. Приводим уравнение к каноническому виду (23.7), разделив на $x \neq 0$ и тем самым устанавливаем тип этого уравнения

$$y' - \frac{3}{x} y = x.$$

Решим уравнение, используя подстановку Бернулли

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

Подставляя, получаем

$$u'v + uv' - \frac{3}{x} uv = x \Rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{3}{x} v \right) = x \;\Rightarrow$$

$$v: \quad v' - \frac{3}{x} v = 0, \qquad\qquad u: \quad u'x^3 = x,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{x} dx, \qquad\qquad \frac{du}{dx} = \frac{x}{x^3},$$

$$\ln|v| = 3\ln|x,| \qquad\qquad \int du = \int \frac{dx}{x^2},$$

$$v = x^3. \qquad\qquad u = -\frac{1}{x} + C.$$

Тогда общее решение запишется

$$y = u \cdot v = x^3 \left(-\frac{1}{x} + C \right) = Cx^3 - x^2.$$

Замечание 3. Используя *замену Бернулли* $y = u \cdot v$ аналогично предыдущему можно решать и *уравнение Бернулли*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \tag{23.13}$$

в котором $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные непрерывные в рассматриваемой области функции.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить уравнения, установив их тип:

1.1. $y' = \frac{y}{x} - 1$, Отв. $y = x\ln\frac{C}{x}$.

1.2. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$, Отв. $x = Ce^{\frac{x}{y}}$.

1.3. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$, Отв. $(x-C)^2 - y^2 = C^2$.

1.4. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$, Отв. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$.

1.5. $ydy + (x-2y)dx = 0$, Отв. $x = (y-x)\ln C(y-x)$.

1.6. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right)$, Отв. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln Cx = 0$.

2.Решить уравнения, установив их тип

2.1. $y' - \frac{y}{x} = x$, Отв. $y = Cx + x^2$.

2.2. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$, Отв. $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$.

2.3. $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$, Отв. $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$.

2.4. $y' - y = e^x$, Отв. $y = (x+c)e^x$.

2.5. $x^2 + xy' = y, y(1) = 0$, Отв. $y = x - x^2$.

ЛЕКЦИЯ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Оглавление

24.1 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальным уравнением n*-го порядка* называется уравнение, связывающее неизвестную функцию y, независимую переменную x и производные функции y по x до n-го порядка включительно

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (24.1)$$

Ограничимся рассмотрением уравнений n-го порядка, разрешенных относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right), \qquad (24.2)$$

где f – определенная, однозначная и непрерывная функция в области изменения своих аргументов.

Задача Коши для уравнения (24.2) формулируется так: среди всех решений этого уравнения найдется такое решение $y = y(x)$, для которого выполняются следующие *начальные условия*

$$y(x_0) = y_{0,} y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'',..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (24.3)$$

здесь $x_0, y_0 y_0',..., y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (24.4)$$

задача Коши состоит в нахождении решения, удовлетворяющего следующим начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \qquad (24.5)$$

Геометрически решение дифференциального уравнения (24.4) сводится к нахождению интегральной кривой, проходящей через заданную точку $P_0(x_0, y_0)$ и имеющей в ней заданную касательную, которая образует с положительным направлением оси абсцисс такой угол α_0, что $tg\alpha_0 = y_0'$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши определяет условия, при которых решение дифференциального уравнения (24.2) существует и является единственным при заданных начальных условиях (24.3). Приведем (без доказательства) формулировку этой теоремы.

Если в дифференциальном уравнении (24.2) функция $f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right)$*:*
а) непрерывна по всем своим аргументам $x, y, y', y^{(n-1)}$ *в некоторой области D их изменения;*
б) имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'},..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$*, то найдется интервал* $x_0 - h < x < x_0 + h$ *на котором существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения(24.2), удовлетворяющее заданным начальным условиям (24.3), где значения* $x = x_0, y = y_0, y' = y_0',..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ *содержатся в области D.*

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков путем *понижения порядка.*

I. Дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{24.6}$$

где $f(x)$ – дифференцируемая функция. Последовательно интегрируя дифференциальное уравнение (24.6) n раз и каждый раз соответственно понижая порядок уравнения на единицу, получим общее решение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' = \sin 2x.$$

при следующих начальных условиях $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Решение. По определению второй производной

$$\frac{d}{dx}y' = \sin 2x \Rightarrow dy' = \sin 2x dx \Rightarrow y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

Ищем значение C_1, используя начальные условия

$$1 = -\frac{1}{2}\cos\pi + C_1, \text{ т.к. } \cos\pi = -1, \text{ то } C_1 = \frac{1}{2} \text{ и } y' = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$$

Интегрируя последнее равенство еще раз, получаем

$$y = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C_2.$$

Находим значение C_2, используя начальные условия

$$0 = -\frac{1}{4}\sin\pi + \frac{\pi}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда искомое частное решение запишется

$$y = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}.$$

II. Дифференциальные уравнения, явно не содержащие искомую функцию и несколько последовательных первых производных

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{24.7}$$

С помощью подстановки $y^{(k)} = p(x)$, где p – новая неизвестная функция, можно понизить порядок уравнения на k единиц, т.е. привести к уравнению $(n-k)$–го порядка

$$F\left(x, p, p', ..., p^{(n-k)}\right) = 0. \tag{24.8}$$

В частном случае, уравнение

$$f(x, y', y'') = 0$$

подстановкой $y' = p(x)$ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$f(x, p, p') = 0.$$

Находим общее решение последнего уравнения

$$p = \varphi(x, C_1).$$

Учитывая, что $p = y'$ снова получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим общее решение исходного.

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$xy'' + y' = 0.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение явным образом не содержащее искомую функцию y, поэтому замена

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}.$$

В результате получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Решаем его

$$xdp = -pdx \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = -\ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1 / x.$$

Так как $p = y'$, то получаем

$$y' = \frac{C_1}{x} \Rightarrow y = \int \frac{C_1}{x}dx = C_1 \ln|x| + C_2 \text{ – общее решение.}$$

III. Дифференциальные уравнения, явно не содержащие не зависимой переменной

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{24.9}$$

Порядок уравнения понижается на единицу, если принять за независимую переменную y, а за новую искомую функцию $p(y)$, причем положить

$$y'_x = p(y) \Rightarrow y''_{xx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p \text{ и т.д.}$$

В частном случае дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$f(x, y', y'') = 0$$

приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Решив последнее уравнение и возвратившись к старой переменной, снова получим уравнение первого порядка, решение которого будет решением исходного уравнения.

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y'' = 2yy', \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Решение. Это уравнение явным образом не содержит независимую переменную, поэтому понижающая замена

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}p.$$

Тогда уравнение запишется

$$\frac{dp}{dy}p = 2yp.$$

Решаем это уравнение с разделяющимися переменными

$$p(dp - 2ydy) = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ или } dp = 2ydy \Rightarrow p = 2\int ydy \Rightarrow p = y^2 + C_1.$$

Так как $p = y'$, то получаем $y' = y^2 + C_1$ или $y' = 0$.

Но второе уравнение не удовлетворяет начальным условиям.

Из первого уравнения, с учетом начальных условий, получаем

$$1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ и } y' = y^2.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_2.$$

Находим C_2, используя начальные условия

$$-1 = C_2, \text{ тогда } -\frac{1}{y} = x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1-x} \text{ – частное решение.}$$

24.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{24.10}$$

в котором $a_1, a_2 \in \Re$, $f(x)$ – заданная непрерывная в рассматриваемой области функция. Если $f(x) \equiv 0$ то уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{24.11}$$

называют *линейным однородным дифференциальным уравнением*, а в случае $f(x) \neq 0$ уравнение (24.10) называют *линейным неоднородным уравнением 2-го порядка*.

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – два ненулевые решения уравнения (24.11).

Два решения y_1 и y_2 уравнения (24.11) называются *линейно зависимыми* на (a,b), если существуют постоянные λ_1 и λ_2, не обращающиеся одновременно в нуль и такие, что при любом $x \in (a,b)$ справедливо тождество

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \equiv 0. \tag{24.12}$$

Если же тождество (24.12) справедливо только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то решения y_1 и y_2 называются *линейно независимыми*.

О линейной зависимости решений можно судить по определителю

$$\mathrm{W}\,(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{24.13}$$

составленному из функций y_1, y_2 и их производных, который называют *определителем Вронского (вронскианом)*. Справедливо следующее утверждение (без доказательства).

Теорема 1. *Если решения y_1 и y_2 уравнения (24.11) линейно независимы на (a,b), то $\mathrm{W}\,(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни в одной точке из (a,b).*

Пример 4. Установить линейную зависимость или независимость следующих решений y_1 и y_2 уравнения (24.11)

а) $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$, где $k_1 \neq k_2$;

Составим вронскиан и вычислим его:

$$\mathrm{W}\,(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_2 + k_1)x} \neq 0 \;\forall x \in \Re,$$

так как $k_2 \neq k_1$. Следовательно, решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ линейно независимые. Очевидно, если $k_1 = k_2 = k$, то функции будут линейно зависимые, т.к. в этом случае $\mathrm{W}\,(y_1, y_2) \equiv 0$.

б) $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$;

Составляем вронскиан

$$\mathrm{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{xk} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (1+kx)e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0 \;\forall x \in \Re,$$

т.е. решения линейно независимы.

в) $y_1 = \sin bx,\ y_2 = \cos bx,\ b \neq 0$;

Вычисляем

$$\mathrm{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin bx & \cos bx \\ b\cos bx & -b\sin bx \end{vmatrix} = -b\left(\sin^2 bx + \cos^2 bx\right) = -b \neq 0$$

для всех x. Следовательно, y_1 и y_2 линейно независимы.

г) $y_1 = e^{ax}\sin bx, y_2 = e^{ax}\cos bx, b \neq 0$;

Находим

$$\mathrm{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{ax}\sin bx & e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) & e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) \end{vmatrix} = -be^{2ax}\left(\sin^2 bx + \cos^2 bx\right) =$$

$$= -be^{2ax} \neq 0$$

для всех x. Значит решения y_1 и y_2 линейно независимы.

Рассмотрим без доказательства теорему о виде общего решения линейного однородного уравнения (24.11).

Теорема 2. *Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (24.11), то функция*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{24.14}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (24.11), т.е. дает все решения этого уравнения.

Используя эту теорему, построим общее решение уравнения (24.11). Для этого достаточно найти его два линейно независимых частных решения. Будем искать решения в виде Эйлера $y = e^{kx}$, где k – некоторое пока неизвестное число. Подставляем это решение в уравнение (24.11), предварительно вычислив

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx},$$

получаем

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + a_1 k + a_2\right) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0 \forall x$, то для нахождения k получаем *характеристическое уравнение*

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{24.15}$$

Уравнение (24.15) является квадратным уравнением, находим его корни по формуле

$$k_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \tag{24.16}$$

В зависимости от характера корней уравнения (24.16) получаются различные общие решения уравнения (24.11). Рассмотрим различные случаи.

1. Корни действительные и различные ($k_1 \neq k_2$). В этом случае частными решениями уравнения (24.11) будут $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$. Как было показано в примере 4а) эти решения линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (24.11) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{24.17}$$

2. Корни действительные и равные $(k_1 = k_2 = k)$. В этом случае одно частное решение имеет вид $y_1 = e^{kx}$. В качестве другого решения можно взять $y_2 = xe^{kx}$. Непосредственной подстановкой y_2 в (24.11) можно убедиться, что эта функция является решением исходного уравнения. Как было показано в примере 4б), решения y_1 и y_2 линейно независимые и согласно теореме 2 общее решение уравнения (24.11) имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{24.18}$$

3. Корни комплексные $(k_{1,2} = \alpha \pm \beta i)$, где $\alpha = -\frac{a_1}{2}, \beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$ – мнимая часть комплексного числа, $i^2 = -1$. Легко проверить, что в этом случае линейно независимыми решениями уравнения (24.11) являются частные решения $y_1 = e^{\alpha x}\sin \beta x, y_2 = e^{\alpha x}\cos \beta x$ (см. пр. 4г)). Следовательно, общее решение уравнения (24.11) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \tag{24.19}$$

Таким образом, решение однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (24.11) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (24.15), которое легко составить непосредственно по уравнению (24.11), заменив в последнем производные соответствующими степенями показателя $k(y \to k^0 = 1)$.

Пример 5. Решить уравнения

а) $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Это – линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Записываем соответствующее характеристическое уравнение и находим его корни $k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 3$ – действительные и различные. В силу формулы (24.17) его общее решение записывается в виде

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

б) $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 6k + 9 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = k = 3$ – действительные и равные. По формуле (24.18) находим общее решение исходного уравнения

$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$. По формуле (24.16) находим его корни $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9 \cdot (-1)} = 2 \pm \sqrt{9 \cdot i^2} = 2 \pm 3i$, т.е. $\alpha = 2, \beta = 3$. Используя формулу (24.19), получим общее решение исходного уравнения

$y = e^{2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения более высоких порядков решаются аналогично.

Рассмотрим *неоднородное линейное уравнение 2-го порядка (24.10)*

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$.

Для линейных неоднородных уравнений имеет место следующая теорема о виде их общего решения (без доказательства).

Теорема 3. *Общее решение неоднородного линейного уравнения (24.10) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{24.20}$$

и какого-либо частного решения $y_ч$ неоднородного уравнения (24.10), т.е.

$$y = y_о + y_ч \tag{24.21}$$

Отметим, что в силу теоремы 2 и предложенной выше методики общее решение соответствующего однородного уравнения $y_о$ всегда можно построить.

Частное решение неоднородного уравнения $y_ч$ можно найти или *методом Лагранжа* (вариации произвольных постоянных) или *методом неопределенных коэффициентов* (если правая часть $f(x)$ имеет специальный вид).

Метод Лагранжа. Идея этого метода состоит в том, что частное решение неоднородного уравнения (24.10) ищется в виде «похожем» на вид общего решения соответствующего однородного уравнения (теорема 2) т.е.

$$y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \tag{24.22}$$

где y_1, y_2 – два линейно независимых частных решения уравнения (24.20), а $C_1(x), C_2(x)$ - искомые функции (в формуле (24.14) C_1, C_2 – произвольные постоянные). Если функция (24.22) является решением уравнения (24.10), то ее подстановка в это уравнение обратит последнее в тождество. Используем это для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Вычисляем производные

$y'_ч = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C_1 y'_1 + C_2 y'_2$

Положим, что функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ таковы что

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \qquad (24.23)$$

Тогда $y'_ч$ принимает вид

$$y'_ч = C_1 y'_1 + C_2 y'_2. \qquad (24.24)$$

Аналогично вычисляем

$$y''_ч = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2. \qquad (24.25)$$

Подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в уравнение (24.10) и учитывая что y_1 и y_2 – частные решения соответствующего однородного уравнения (24.20), получаем второе уравнение для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x). \qquad (24.26)$$

Таким образом, уравнения (24.23) и (24.26) образуют систему линейных алгебраических уравнений для нахождения $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x). \end{cases} \qquad (24.27)$$

Эта система имеет единственное решение, так как ее главный определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

как определитель Вронского линейно независимой системы решений y_1 и y_2 линейного однородного уравнения (24.20).

Решив систему (24.27), находим

$$C'_1(x) = \varphi_1(x), \quad C'_2(x) = \varphi_2(x). \qquad (24.28)$$

Проинтегрировав (24.28) и подставив полученные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (24.22) получим искомое частное решение $y_ч$ уравнения (24.10).

Пример 6. Решить уравнение

$y'' - y = x$.

Решение. Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. По теореме 3 его общее решение ищем в виде $y = y_o + y_ч$, где y_o – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_ч$ – любое частное решение неоднородного уравнения. Ищем y_o и $y_ч$.

$y_o - ?$ $\quad y'' - y = 0,\ k^2 - 1 = 0,\ k_1 = -1,\ k_2 = 1$ – действительные и различные. В силу (24.17) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}, \qquad (24.29)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{x}$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

$y_ч - ?$ Согласно методу Лагранжа $y_ч$ ищем в виде

$$y_ч = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{x}, \qquad (24.30)$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – искомые функции. Для их нахождения составляем систему (24.27)

$$\begin{cases} C'_1 e^{-x} + C'_2 e^{x} = 0, \\ -C'_1 e^{-x} + C'_2 e^{x} = x. \end{cases}$$

Её решениями будут $C'_1(x) = -\frac{1}{2} x e^{x}$, $C'_2(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$.

Интегрируя два последних равенства, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int xe^x dx = \frac{1}{2}e^x(1-x),$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int xe^{-x} dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(x+1).$$

Подставляем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (24.30) и получаем $y_ч$

$$y_ч = \frac{1}{2}e^x(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)e^x = -x, \text{ т.е. } y_ч = -x$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения запишется

$$y = y_o + y_ч = C_1e^{-x} + C_2e^x - x.$$

Метод неопределенных коэффициентов нахождения $y_ч$.

Метод Лагранжа имеет существенные недостатки: решение алгебраической системы с громоздкими коэффициентами; вычисление громоздких интегралов. Поэтому, если можно, его избегают и применяют метод неопределенных коэффициентов в котором частное решение ищется без квадратур. При этом правая часть неоднородного уравнения (24.10) должна иметь специальный вид

$$f(x) = e^{ax}\left(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right), \tag{24.31}$$

где $P_l(x), Q_m(x)$ – многочлены степени l и m соответственно, $a, b \in \Re$.

В этом методе частное решение $y_ч$ неоднородного уравнения ищется в виде «похожем» неоднородность $f(x)$ (24.31)

$$y_ч = e^{ax}\left(N_k(x)\cos bx + M_k(x)\sin bx\right)x^{\mu}, \tag{24.32}$$

где $k = \max(l, m)$ – наибольшая степень многочлена, входящего в $f(x)$; $N_k(x), M_k(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени k; μ – кратность характеристики (числа $\chi = a + bi$) среди корней характеристического уравнения. Если число χ не встречается среди корней характеристического уравнения, то полагают $\mu = 0$. Под многочленами $N_k(x)$ и $M_k(x)$ понимают

$N_0(x) = A,$	$M_0(x) = B,$
$N_1(x) = Ax + B,$	$M_1(x) = Cx + D,$
$N_2(x) = Ax^2 + Bx + C,$	$M_2(x) = Dx^2 + Ex + F,$
....	....

Неопределенные коэффициенты $A, B, C, D, E, F...$ многочленов $N_k(x), M_k(x)$ определяют непосредственной подстановкой построенного $y_ч$ (24.32) в исходное уравнение и приравниванием коэффициентов при подобных членах в левой и правой части полученного равенства. Искомые коэффициенты ищутся и притом единственным образом, так что уравнение (24.10) имеет только одно частное решение.

Пример 7. Решить уравнение

$$y'' - y = x.$$

Решение. Аналогично пр.6 $y = y_o + y_ч$ и

$$y_o = C_1e^{-x} + C_2e^x$$

$$y_ч - ?$$

Записываем неоднородность $f(x) = x$ и характеризуем ее, сравнивая с самым общим видом неоднородности (24.31). Очевидно, что в рассматриваемом случае, $a = 0$ (т.к. отсутствует член, содержащий e^{ax}), $b = 0$ (т.к. отсутствуют члены с $\cos bx$ и $\sin bx$), $k = 1$ (т.к. в неодно-

родность входит многочлен 1-й степени), характеристика правой части $\chi = a + bi = 0$, (т.к. $a = b = 0$) и число 0 не встречается среди корней характеристического уравнения $(k_1 = -1, k_2 = 1)$, поэтому $\mu = 0$. Так как $k = 1$, то $N_1(x) = Ax + B,\ M_1(x) = Cx + D$.
Подставляя все найденные значения $a, b, \mu, N_1(x), M_1(x)$ в (24.32), получаем частное решение

$$y_ч = e^{0x}\left(N_1(x)\cos 0x + M_1(x)\sin 0x\right)x^0 = N_1(x) = Ax + B. \qquad (24.33)$$

Для нахождения значений A и B вычисляем производные $y'_ч, y''_ч$ построенного решения и подставляем в неоднородное уравнение

$$y'_ч = A, \quad y''_ч = 0,$$

тогда

$$-Ax - B = x.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных членах:

$$\left.\begin{array}{l} x^1 : -A = 1 \\ x^0 : -B = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = -1,\ B = 0.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов A и B в (24.33), получаем искомое частное решение

$$y_ч = -x.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_о + y_ч = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - x.$$

Пример 8. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + y = \sin x.$$

Решение. Это неоднородное линейное уравнение, поэтому

$$y = y_о + y_ч$$

$$y_о - ? \quad y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm\sqrt{i^2} = \pm i.$$

Корни комплексные $(\alpha = 0, \beta = 1)$, по формуле (24.19) получаем

$$y_о = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$y_ч - ? \quad f(x) = \sin x.$$

Характеризуем правую часть $f(x) = \sin x : a = 0, b = 1, \chi = a + bi = i$. Число $\chi = i$ является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому $\mu = 1$. Максимальная степень многочлена, входящего в $f(x)$ нулевая $(k = 0)$, т.к. перед $\sin x$ стоит коэффициент 1, а любая постоянная является многочленом нулевой степени. Поэтому $N_0(x) = A, M_0(x) = B$.
Подставляя все полученные данные в формулу (24.32) получаем $y_ч$

$$y_ч = (A\cos x + B\sin x)x$$

Вычисляем $\begin{array}{l} y'_ч = (B - Ax)\sin x + (A + Bx)\cos x, \\ y''_ч = (2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x \end{array}$

и подставляя значения $y''_ч$ и $y_ч$ в исходное неоднородное уравнение, получим

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой части равенства, получаем систему

$$\left.\begin{array}{l} \sin x : -2A = 1 \\ \cos x : 2B = 0 \end{array}\right\},$$

откуда находим $A=-\frac{1}{2}, B=0$. Следовательно, частное решение

$y_ч=-\frac{1}{2}x\cos x$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$y=y_0+y_ч=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить уравнения, используя понижение порядка

1.1. $y''' = e^{2x}$, Отв. $y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

1.2. $x\left(y''+1\right) + y' = 0$, Отв. $y = C_1\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$.

1.3. $\left(xy'' - y'\right)y' = x^3, y\left(1\right) = 1, y'\left(1\right) = 0$, Отв. $225\left(y-1\right)^2 = 8\left(x-1\right)^3\left(3x+2\right)^2$.

1.4. $2y(y')^3 + y'' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -3$, Отв. $y^3 - y = 3x$.

2. Решить линейные однородные уравнения

2.1. $y'' - 5y' + 6y = 0$, Отв. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

2.2. $y'' + 2y' + y = 0$, Отв. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$.

2.3. $y' - y = 3y''$, Отв. $y = e^{\frac{x}{6}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$.

2.4. $y'' + 4y' + 3y = 0$, Отв. $y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$.

2.5. $y'' - 2y' + y = 0, y\left(2\right) = 1, y'\left(2\right) = -2$, Отв. $y = \left(7-3x\right)e^{x-2}$.

3. Решить линейные уравнения

3.1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$, Отв. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{2x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 + 4x + 3\right)$.

3.2. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, Отв. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$.

3.3. $y'' - 8y' + 7y = 14$, Отв. $y = C_1e^{x} + C_2e^{7x} + 2$.

3.4. $y'' - 4y = e^{x}$, Отв. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}$.

3.5. $y'' + y = 4e^{x}, y\left(0\right) = 4, y'\left(0\right) = -3$, Отв. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^{x}$.

3.6. $y'' - 2y' = 2e^{x}, y\left(1\right) = -1, y'\left(1\right) = 0$, Отв. $y = e^{2x-1} - 2e^{x} + e - 1$.

3.7. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y\left(0\right) = y'\left(0\right) = 0$, Отв. $y = e^{-x}\left(x - \sin x\right)$.