

## ЛЕКЦИИ

### Лекция 1. Предмет начертательной геометрии. Метод проекций

#### 1. История развития начертательной геометрии

#### 2. Обозначения и символы языка начертательной геометрии

#### 3. Метод проекций

#### 4. Эпюр Монжа

#### 1. История развития инженерной графики

Начертательная геометрия занимает особое положение среди других наук. Она является лучшим средством развития у человека пространственного мышления и воображения.

**Начертательная геометрия** – один из разделов геометрии, в котором пространственные фигуры, представляющие собой совокупность точек, линий, поверхностей, изучаются по их плоским изображениям или проекциям.

Основная задача начертательной геометрии заключается в сопоставлении трёхмерного объекта с его плоской проекционной моделью.

Плоское изображение предмета или детали называется её чертежом. **Чертёж** – это не просто рисунок, а конструкторский документ. Он выполняется по соответствующим требованиям, единым стандартом. Его можно назвать своеобразным языком, в котором используются точки, линии, буквы, цифры, причём этот язык является интернациональным, т.к. он понятен любому инженеру и не зависит от языка.

При помощи этих простых геометрических элементов (точек, линий и т.д.) человек имеет возможность изобразить сложнейшие механизмы, приборы, здания и т.д.

Методы начертательной геометрии находят широкое применение в физике, химии, механике, кристаллографии, архитектуре и применяются практически во всех отраслях промышленности, начиная от лесного хозяйства и заканчивая сложнейшей электроникой космических летательных аппаратов.

Начертательная геометрия, как и другие разделы математики, развивает логическое мышление и поэтому входит в число фундаментальных дисциплин инженерного образования.

Начертательная геометрия и инженерная графика укладываются в рамки одной учебной дисциплины и выполняют одну и ту же задачу – сопоставление трёхмерного объекта с его плоской проекционной моделью. Отличие между ними заключается в том, что в инженерной графике под трёхмерным объектом понимается конкретное, материально воплощённое задание, строительное сооружение или деталь, в то время как начертательная геометрия имеет дело с абстрактными, отвлечёнными моделями. В этом смысле инженерная графика представляет собой очень частное ответвление начертательной геометрии, её узкоспециализированный подраздел. Но, благодаря такой узкой практической направленности инженерной графики, в ней появляются совершенно новые вопросы, к начертательной геометрии отношения не имеющие. Сюда относятся правила оформления чертежей, сведения об использовании технических стандартов и ряд других вопросов.

История развития начертательной геометрии уходит корнями в глубокую древность. Об этом свидетельствуют памятники древнего искусства, строительные и архитектурные формы, сохранившиеся до нашего времени. Ещё древние египтяне

пытались изображать объекты в виде плоских проекций, но это всё осуществлялось стихийно, без использования твёрдо установленных правил и закономерностей.

Первое сохранившееся систематизированное изложение инженерного опыта относится к 16-13 годам до н.э.: сочинение под названием «Десять книг об архитектуре» написал римский зодчий и инженер Марк Витрувий Поллион.

Примерно в это же время расцвета культуры древней Греции шло интенсивное накопление геометрических знаний. Появилась вычислительная геометрия. Пифагор, Эвклид и др. систематизировали геометрические сведения. Эвклид издал труд под названием «Начала» – 15 книг, куда вошли определения, постулаты, основные аксиомы и теоремы. Он построил науку геометрию так, как она есть сейчас. Мы до сих пор пользуемся ей почти без изменений. Из учёных этой же эпохи можно назвать также Архимеда, Фалеса.

Следующим рывком в развитии наук, искусств и техники явилась эпоха Возрождения. Вопросам построения наглядных изображений (перспективы) уделяли в то время большое внимание многие известные учёные, инженеры, зодчие и художники. Среди них Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер, Леон Баттиста, Гвидо Убальди. Такое повышенное внимание к этой теме было вызвано развитием техники, усложнением архитектурно-строительных задач, а также общим духом времени, направленным на культ научного метода и научного знания.

Достигнутые здесь успехи не прошли даром и принесли свои плоды в годы французской революции (18 век). Геометры этого времени - Жерар де Зак, Паскаль и другие. Паскалем были изучены конические сечения. Крупный математик, инженер, член Парижской Академии наук Гаспар Монж выступил со своей работой «Начертательная геометрия» в 1798 г. В этом научном труде впервые была проработана идея адекватного отображения трёхмерного пространства на плоскость с помощью проекционного метода. Вариант такого отображения, который называется системой ортогонального проецирования на три плоскости проекций, используется до настоящего времени. Гаспар Монж считается основоположником начертательной геометрии.

С тех пор начертательная геометрия пополнилась некоторыми вспомогательными вариантами проекционных изображений (аксонометрия) и постепенно оформлялась жёсткими правилами, требованиями, стандартами. Весь этот материал в совокупности составил основу современной инженерной графики.

Наряду с этим тенденция к обобщению привела к объединению идей Г. Монжа и исследователей эпохи Возрождения. В результате этого возникла классическая начертательная геометрия, предназначенная для изучения геометрических образов трёхмерного пространства. Развивалась проективная геометрия (Х. Винер, Г. Гаук, Э. Мюллер), рассматривались проблемы отображения многомерного геометрического пространства и способы построения нелинейных изображений (В. Фидлер, Е.С. Фёдоров). Эти исследования составили область математически абстрагированной начертательной геометрии.

Русские инженеры и зодчие пользовались на практике проекционными чертежами, в том числе и системой ортогональных проекций задолго до появления Г. Монжа. Об этом свидетельствуют сохранившиеся документы, относящиеся к началу XIX века (изобретатель Кулибин и зодчие С.И. Чевакинский, К.А. Ухтомский, В.И. Баженов). В те времена в инженерных школах преподавалось черчение. В Перновском военно-техническом училище 1731-1733 г. преподавание математических наук, фортификации и

черчения вёл А.П. Ганнибал – прадед А.С. Пушкина. В начале XIX века в высших и средних учебных заведениях началось преподавание начертательной геометрии. Шарль Потье читал курс лекций в Московском институте инженеров путей сообщения. Появились первые учебные пособия (Я.С. Севастьянов, Н.И. Макаров, В.И. Курдюмов) по начертательной геометрии в строго классическом её понимании. И в этом виде дисциплина сохранилась до 20 века.

Примерно с середины 40-х годов началось развитие вычислительной техники, появились ЭВМ. Среди разнообразных функций, доступных компьютеру, могут быть: выполнение графиков, схем и чертежей. Возникла специальная учебная дисциплина – «Машинная графика», которая, с 1987 г. вошла в учебную программу подготовки инженеров.

## 2. Обозначения и символы языка начертательной геометрии

При выполнении чертежей и изображений в начертательной геометрии приняты следующие условные обозначения:

а) точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или цифрами. Например: А, В, С или 1, 2, 3. Цифры и буквы могут быть снабжены индексами: А<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>;

б) линии принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: а<sub>1</sub>, в<sub>2</sub>, т<sub>3</sub> и т.д.;

в) плоскости обозначаются заглавными буквами греческого алфавита: Г, Σ, Ω, Ψ;

г) знак параллельности: // . Например, прямая А параллельна прямой В записывается: А//В;

д) пересечение: а ∩ в;

е) скрещивание: ∙ / . Прямая т скрещивается с прямой п: т ∙ / п;

ж) обозначение угла: ∠АВС;

з) принадлежность:  $\dot{\Gamma}$

Точка М принадлежит прямой t: М  $\dot{\Gamma}$  t;

и) перпендикулярность:  $\wedge$

Прямая l перпендикулярна плоскости S: l  $\wedge$  S.

## 3. Метод проекций

Для решения основной задачи начертательной геометрии, т.е. для установления адекватного соответствия положения точки в пространстве и её изображения на плоскости применяется конструктивный приём, который именуется операцией проецирования. Для этого вводится некоторая плоскость, которая называется плоскостью проекций, и некоторая точка в пространстве – центр проекций. Через центр проекций и данную точку проводится луч до пересечения с плоскостью проекций.

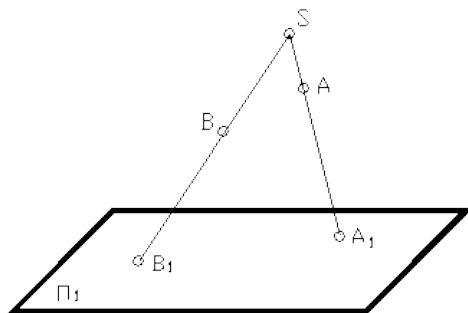


Рисунок 1

На рисунке 1 точка  $S$ - центр проекций;  $\Pi_1$ - плоскость проекций; точка  $A_1$  и  $A_2$ - проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi_1$ .

Однако для того, чтобы проделать обратную процедуру, т.е. по проекции точки получить ее положение в пространстве, недостаточно одной ее проекции. Имея две проекции точки  $A$  и два центра проекций, можно получить точку  $A$  (рисунок 2).

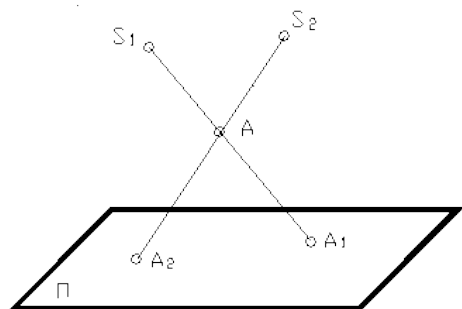


Рисунок 2

Параллельное проецирование является частным случаем центрального, когда центр проекции удалён в бесконечность. В этом случае задаётся направление проецирования – луч  $S_1$  или  $S_2$ . Проекцией точки  $A$  в данном случае будет точка пересечения луча, проведённого через эту точку параллельно направлению проецирования до пересечения с плоскостью проекций (рисунок 3).

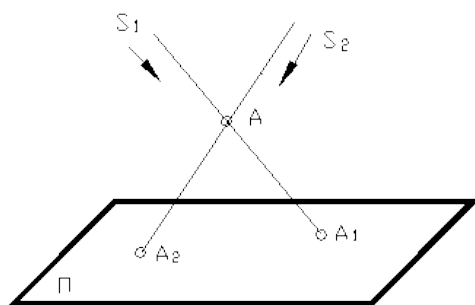


Рисунок 3

Для того, чтобы по проекциям точки  $A$  получить её истинное положение в пространстве, необходимо иметь две её проекции на плоскость  $\Pi$ . Точка пересечения лучей, восстановленных из точки  $A_1$  и  $A_2$  параллельно  $S_1$  и  $S_2$ , будет являться точкой  $A$ .

Частным случаем параллельного проецирования является ортогональное проецирование. При этом направление проецирования всегда перпендикулярно плоскости проекций (рисунок 4).

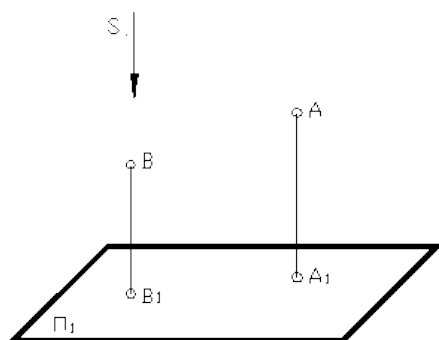


Рисунок 4

В случае ортогонального проецирования, для того чтобы определить положение точки в пространстве по её проекции, необходимо ввести дополнительную плоскость проекций  $\Pi_2$ , которая была бы перпендикулярна  $\Pi_1$  (рисунок 5).

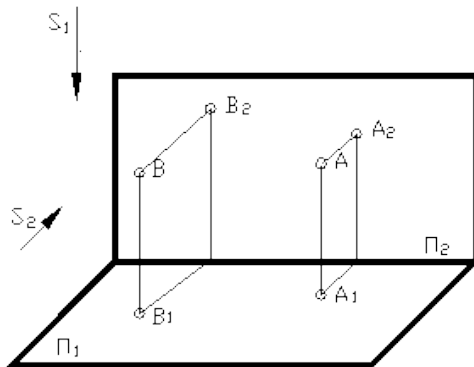


Рисунок 5

На рисунке 5 показано построение проекций точки  $A$  на две взаимно ортогональные плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . И наоборот, имея две проекции точки  $A$  –  $A_1$  и  $A_2$ , мы всегда можем получить положение точки  $A$  в пространстве, восстановив перпендикуляры к плоскостям проекций.

Преимущества ортогонального проецирования:

1. Простота графических построений для определения ортогональных проекций.
2. Возможность сохранить при определённых условиях на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

В машиностроении, для того чтобы иметь возможность по чертежу судить о форме и размерах изображаемых деталей пользуются не двумя, а несколькими плоскостями проекций, как правило, тремя. Эти три взаимно ортогональные плоскости носят названия:  $\Pi_1$  - горизонтальная,  $\Pi_2$  - фронтальная и  $\Pi_3$  - профильная плоскость проекций. На рисунке 6 показано построение проекций точки в этой системе плоскостей проекций.

#### 4.Эпюр Монжа

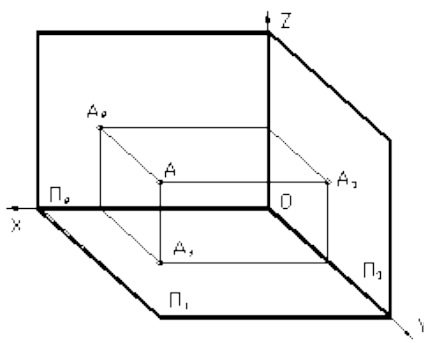


Рисунок 6

Рисунок 6 представляет пространственное изображение точки  $A$  и плоскостей проекций, но в инженерной практике пользоваться такими изображениями не всегда удобно. Поэтому применяется плоский чертёж, на котором совмещены все три плоскости и который носит название Эпюр Монжа. Образуется он следующим образом: горизонтальная плоскость  $\Pi_1$  поворачивается вокруг оси  $X$  на 90 градусов вниз до совмещения с фронтальной плоскостью, а профильная поворачивается вокруг оси  $Z$  на 90 градусов вправо. В результате получим плоское изображение всех трёх плоскостей проекций (рисунок 7). Этот чертёж называется эпюром Монжа или комплексным чертежом.

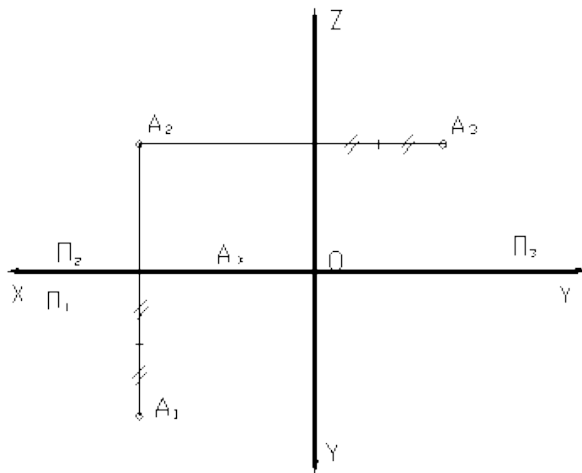


Рисунок 7

Построим проекции точки  $A$ , изображённой на рисунке 6, на эпюре Монжа. Для этого отложим по оси  $X$  (рис.7) координату точки  $A$  по оси  $X$  – расстояние  $A_x$ . Затем из этой точки восстановим перпендикуляры к оси  $X$  на плоскости  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$ .

Вверх, на плоскость  $\Pi_2$ , отложим высоту точки  $A$  или её координату по оси  $Z$ , а вниз, на плоскость  $\Pi_1$ , откладываем глубину точки два раза. Это искажение по оси  $Y$  получается из-за того, что ось  $Y$  повернулась на 45 градусов по сравнению с пространственным изображением. Для того чтобы построить профильную проекцию точки  $A$ , из её фронтальной проекции  $A_2$  проводим перпендикуляр к оси  $Z$  и откладываем на нём от оси  $Z$  глубину точки или её координату по оси  $Y$ . Полученные три проекции точки  $A$  ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ) дают полное представление о положении точки в пространстве. Этот чертёж называется комплексным чертежом точки. Линии, соединяющие проекции точки, называются линиями связи.

#### **Вопросы для самопроверки**

1. Что изучает начертательная геометрия?
2. Что называется чертежом?
3. В чем отличие начертательной геометрии от инженерной графики?
4. Назовите основные этапы развития геометрии.
5. Какие специальные символы существуют для обозначения параллельности, перпендикулярности, пересечения, скрещивания? Какие обозначения вы знаете, кроме этих?
6. В чем сущность центрального проецирования?
7. Как образуется проекция точки при параллельном проецировании?
8. Назовите основные плоскости проекций.
9. Что такое эпюр Монжа? Как он образуется?

### **Лекция 2. Проецирование точки, прямой и плоскости.**

- 1. Проецирование точки, прямой. Комплексный чертёж точки, прямой**
- 2. Прямые общего и частного положения**
- 3. Способы задания плоскости. Комплексный чертёж плоскости**
- 4. Плоскости общего и частного положения**

## 1. Проецирование прямой. Комплексный чертёж прямой

Проекцией прямой, которая не перпендикулярна плоскости проекций, является прямая. Её положение определяется двумя точками, следовательно, для того чтобы построить проекцию прямой, достаточно построить проекции двух её точек.

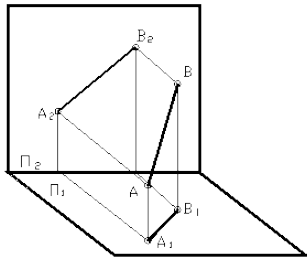


Рисунок 8

## 2. Прямые общего и частного положения

а) Прямой общего положения называется прямая, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскости проекций. Пример такой прямой изображён на рисунке 8. Комплексный чертёж этой прямой будет выглядеть следующим образом.

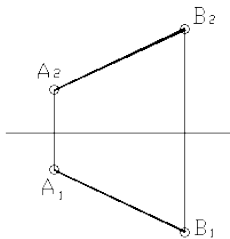


Рисунок 9

б) Прямые частного положения – это прямые, занимающие по отношению к плоскостям проекций особое положение, т.е. либо параллельные, либо перпендикулярные плоскостям проекций.

Первый подкласс прямых частного положения – прямые уровня. Это прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций.

Горизонталь – прямая параллельная горизонтальной плоскости П1. Комплексный чертёж такой прямой изображён на рисунке 10.

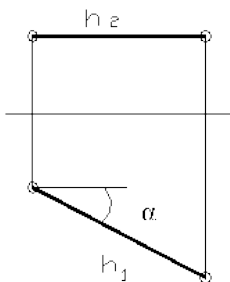


Рисунок 10

Фронтальная проекция горизонтали всегда параллельна прямой X, а угол между осью X и горизонтальной проекцией горизонтали составляет угол между прямой и фронтальной плоскостью проекций. Символическая запись:  $h // П1$ ;  $\alpha = \angle h П2$ .

Фронталь – прямая параллельная фронтальной плоскости П2. Комплексный чертёж фронтали изображён на рисунке 11.

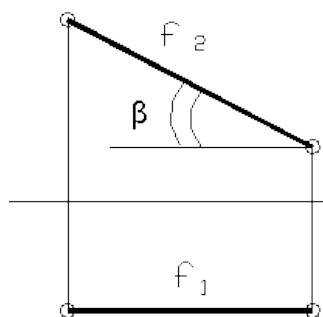


Рисунок 11

Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси  $X$ , а угол  $\beta$  - угол наклона фронтали к горизонтальной плоскости проекций;  $f_2 // \Pi_2$ ,  $\beta = \angle f_1 \Pi_1$ .

Профильная прямая – это прямая, параллельная профильной плоскости  $\Pi_3$ . Комплексный чертёж профильной прямой изображён на рисунке 12. Горизонтальная и фронтальная проекции профильной прямой перпендикулярны оси  $X$ , а углы  $\alpha$  и  $\beta$  - соответственно, углы наклона прямой к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

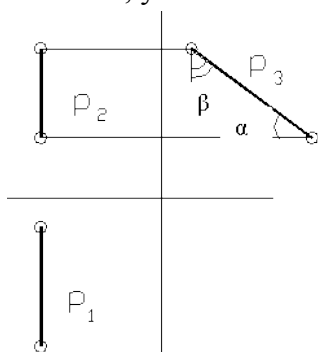


Рисунок 12.

Истинная величина прямых уровня или, так называемая натуральная величина, отображена на тех плоскостях, которым параллельны эти прямые.

Второй подкласс прямых частного положения – проецирующие прямые. Это прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций. К таким прямым относятся: горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая и профильно-проецирующая прямые.

Их комплексные чертежи изображены соответственно на рисунке 13 (а, б, в).

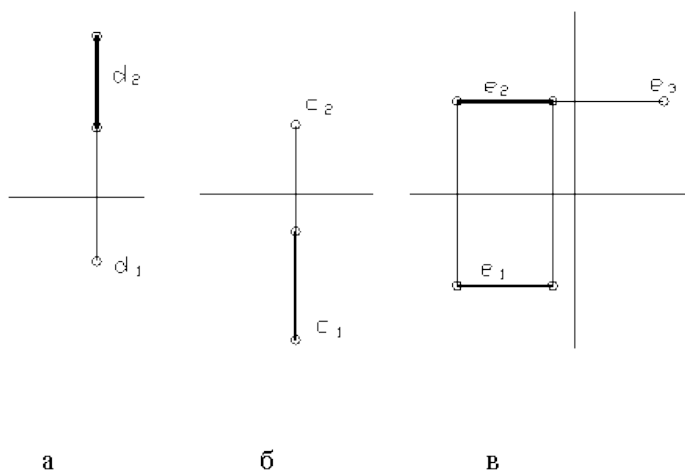


Рисунок 13



Натуральная величина горизонтально-проецирующей прямой – её фронтальная проекция, фронтально-проецирующей прямой – её горизонтальная проекция, а профильно-проецирующей прямой – её горизонтальная и фронтальная проекции.

### 3. Способы задания плоскости. Комплексный чертёж плоскости

а) три точки, не лежащие на одной прямой;

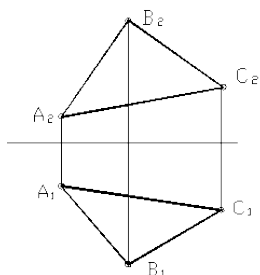


Рисунок 14

б) прямая и точка, не лежащая на ней;

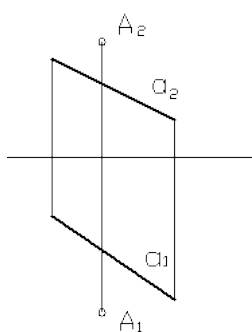


Рисунок 15

в) две параллельные прямые;

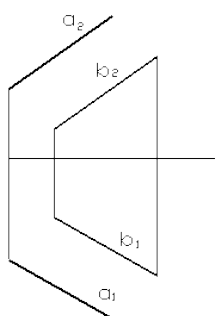


Рисунок 16

г) две пересекающиеся прямые;

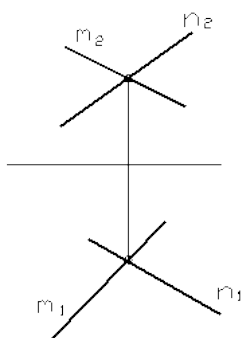


Рисунок 17

д) плоская фигура (многоугольник, круг и т.д.).

#### 4. Плоскости общего и частного положения

Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

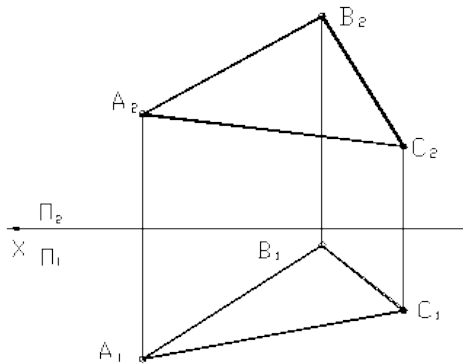


Рисунок 18

Плоскости частного положения аналогично прямой подразделяются на плоскости уровня и проецирующие плоскости. На рисунке 19 (а,б,в) изображены, соответственно, горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости. Причём горизонтальная плоскость задана двумя параллельными прямыми, фронтальная и профильная плоскости – двумя пересекающимися прямыми.

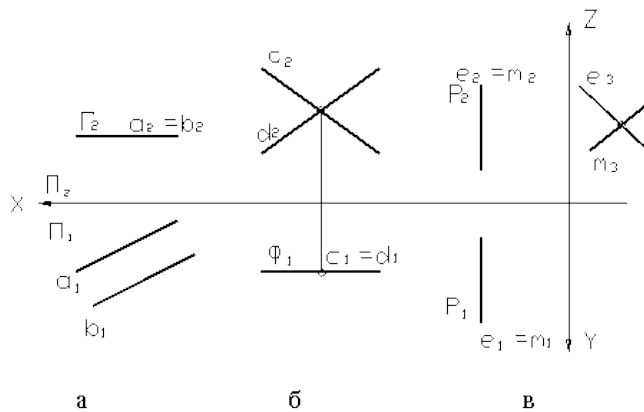


Рисунок 19

На рисунке 20 (а, б, в) показаны проецирующие плоскости. Горизонтально-проецирующая (рис. 20а) задана треугольником, фронтально-проецирующая (рис. 20б) - параллельными прямыми и профильно-проецирующая (рис. 20в) – пересекающимися прямыми.

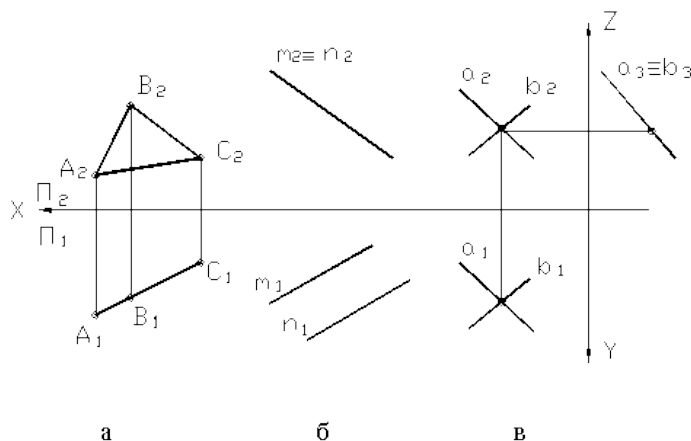


Рисунок 20

### Вопросы для самопроверки

1. Как образуется комплексный чертёж прямой линии?
2. Прямые какого положения вы знаете?
3. Назовите прямые уровня.
4. Как называется прямая, проекцией которой на горизонтальной плоскости будет точка?
5. Перечислите способы задания плоскости.
6. Дайте определение плоскости общего положения.
7. Какие бывают плоскости частного положения? Как они называются и как выглядят на комплексном чертеже?

### Тема 3. Взаимное положение прямой и плоскости.

#### 1. Условия принадлежности точки прямой и прямой плоскости

#### 2. Параллельность прямой и плоскости

#### 3. Пересечение прямой и плоскости

#### 4. Особые прямые в плоскости

##### 1. Условия принадлежности точки прямой и прямой плоскости

Точка принадлежит прямой, если её проекции лежат на одноимённых проекциях этой прямой (рис. 21а).

Точка принадлежит плоскости, если она лежит на прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 21б).

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости (рис. 21в).

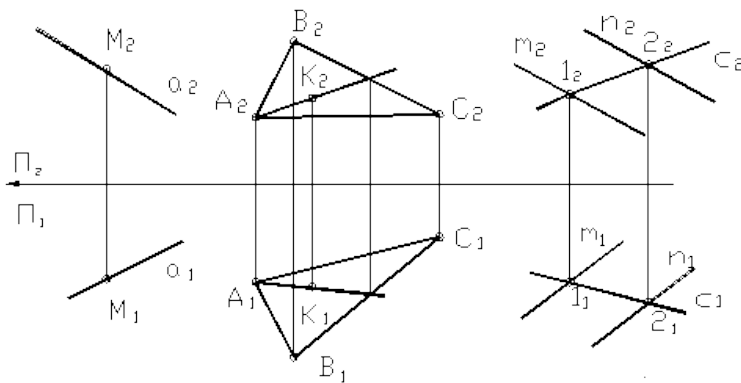


Рисунок 21

##### 2. Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости. На рисунке 22 изображена прямая  $t$ , параллельная прямой  $b$ , принадлежащей плоскости  $\Sigma$ :  $t // b \hat{=} \Sigma$  ( $a \subset b$ ).

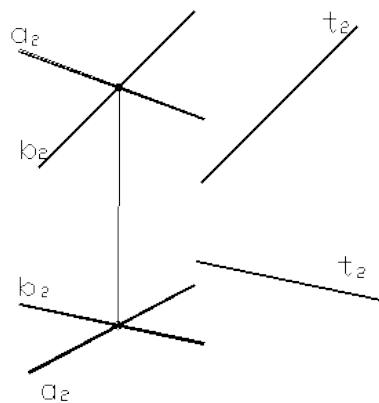


Рисунок 22

Через любую точку пространства можно провести бесконечное множество прямых, параллельных данной плоскости.

### 3. Пересечение прямой и плоскости

Это задача на определение общей точки прямой и плоскости. Её называют также точкой встречи. Рассмотрим пересечение прямой с плоскостью частного положения.

Плоскость  $\Sigma$  задана треугольником  $ABC$  и является горизонтально проецирующей плоскостью. Точка встречи прямой  $k$  с плоскостью  $\Sigma$  определяется по горизонтальной проекции. Фронтальная проекция точки  $K$  достраивается с помощью линии связи. Символическая запись будет выглядеть следующим образом:  $k \cap \Sigma (ABC) = K$ .

Видимость прямой относительно плоскости определяется при помощи фронтально-конкурирующих точек 1 и 2.

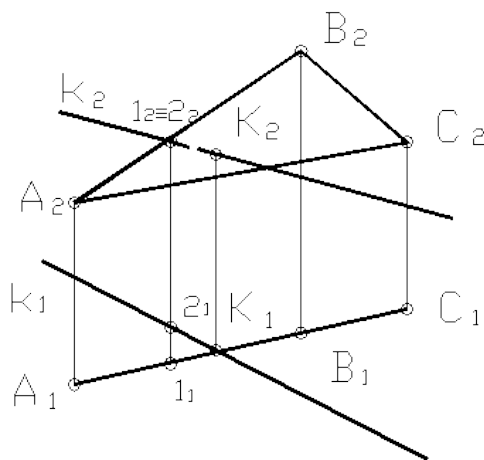


Рисунок 23

Пересечение прямой с плоскостью общего положения изображено на рисунке 24. В этом случае нужно заключить прямую в проецирующую плоскость.

$t \hat{\cap} \Sigma \wedge \Pi_2$  – прямая  $t$  принадлежит плоскости  $\Sigma$ , которая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Линия пересечения этой плоскости с данной – линия (1, 2). Затем находится точка пересечения этой линии с прямой  $t$ , которая и будет являться точкой встречи прямой и плоскости. Видимость прямой относительно плоскости определяется при помощи конкурирующих точек. Возьмем горизонтально конкурирующие точки 3 и 4. Так как точка 3, принадлежащая прямой, оказалась ниже чем точка 4, следовательно, прямая на горизонтальной плоскости справа от точки пересечения невидима. Затем берем фронтально конкурирующие точки 1 и 5. Точка 1, принадлежащая

плоскости, лежит ближе, следовательно, прямая находится за плоскостью, и она на фронтальной проекции невидима от точки 1 до точки К.

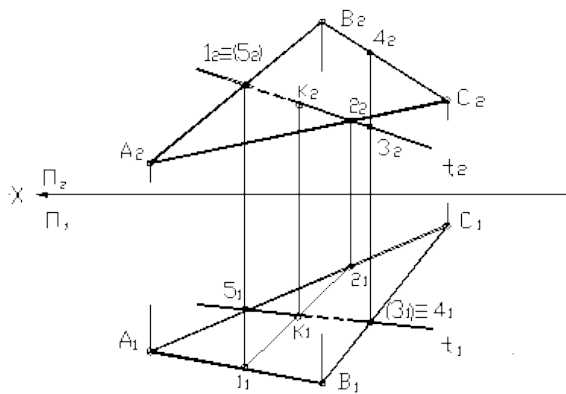


Рисунок 24

#### 4. Особые прямые в плоскости

К особым прямым, принадлежащим плоскости, относятся горизонталь, фронталь и профильная прямая. Построение этих прямых используется при решении многих задач по начертательной геометрии. Их изображение дано на рисунке 25. Причём на горизонтальной плоскости горизонталь имеет натуральную величину, на фронтальной плоскости - фронталь и на профильной плоскости – профильная прямая.

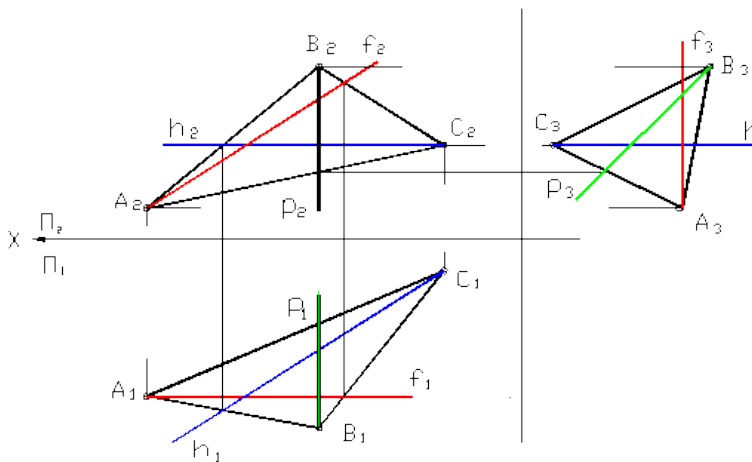


Рисунок 25

#### Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте условия принадлежности точки плоскости и прямой плоскости.
2. Как построить прямую параллельную заданной плоскости?
3. Вспомните этапы решения задачи на определение точки пересечения прямой и плоскости.
4. Какие точки называются конкурирующими?
5. Как провести в плоскости горизонталь и фронталь?
6. Какие еще особые прямые плоскости вы знаете?

### Лекция 4. Взаимное положение плоскостей.

1. Условие параллельности плоскостей
2. Построение линий пересечения плоскостей
3. Перпендикулярность прямой и плоскости

## 4. Способ прямоугольного треугольника

### 1. Условие параллельности плоскостей

Две плоскости параллельны, когда две взаимно пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум взаимно пересекающимся прямым другой плоскости.

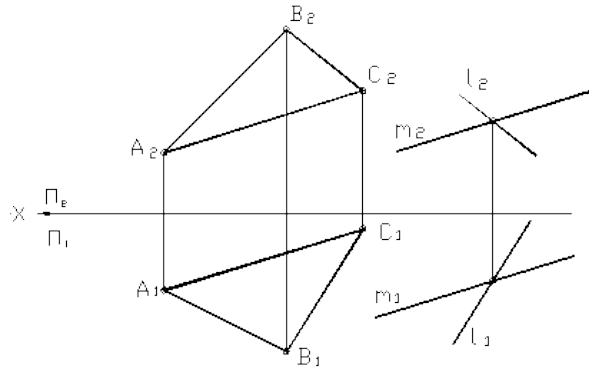


Рисунок 26

На рисунке 26 даны две плоскости. Одна задана треугольником  $ABC$ , а другая двумя пересекающимися прямыми  $l$  и  $m$ . Эти плоскости параллельны, т.к. прямая  $l \parallel BC$ , а  $m \parallel AC$ .

### 2. Построение линий пересечения плоскостей

Прямая линии пересечения двух плоскостей определяется двумя точками, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям. Для того чтобы определить общую точку, принадлежащую обеим плоскостям, вводят вспомогательную плоскость. Затем определяют линии пересечения вспомогательной плоскости и двух данных. Точка пересечения этих линий будет общей точкой плоскостей.

На практике обычно пользуются другим способом - находят точки пересечения двух прямых, принадлежащих одной плоскости с другой плоскостью, и через них проводят линию пересечения плоскостей. Возьмем для примера две плоскости в виде треугольников и построим линию их пересечения таким способом. На рисунке 27 даны две непрозрачные пластины  $ABC$  и  $EFG$ . Первая вспомогательная секущая плоскость  $S$  берется по стороне  $EG$ . Она пересекает плоскость треугольника  $ABC$  по линии  $12$ . Строим горизонтальную проекцию линии  $12$  и находим точку пересечения ее со стороной  $EG$ .

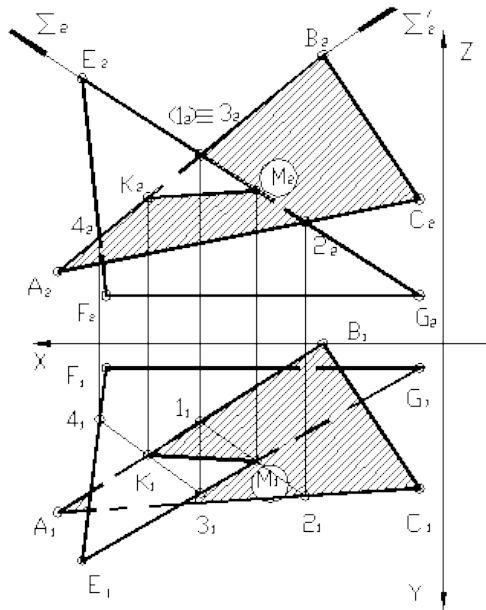


Рисунок 27

Получаем точку М – горизонтальную проекцию точки пересечения. Вторая точка К находится аналогично, путем введения вспомогательной секущей плоскости  $S'$  по стороне АВ. Затем определяется видимость плоскостей при помощи конкурирующих точек. Для того чтобы придать чертежу наглядность, одну из пластин можно заштриховать.

### 3. Перпендикулярность прямой и плоскости

#### Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. При построении перпендикуляра из множества прямых принадлежащих плоскости, выбирают прямые уровня - горизонталь и фронталь. В этом случае горизонтальную проекцию перпендикуляра проводят перпендикулярно горизонтали, а фронтальную - перпендикулярно фронтали. На примере, изображенном на рисунке 29, показано построение перпендикуляра к плоскости, заданной треугольником АВС, из точки К. Для этого сначала проводим горизонталь и фронталь в плоскости. Затем из фронтальной проекции точки К проводим перпендикуляр к фронтальной проекции фронтали, а из горизонтальной проекции точки – перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали. Затем строим точку пересечения данного перпендикуляра с плоскостью при помощи вспомогательной секущей плоскости  $\Sigma$ . Искомая точка – F. Таким образом, полученный отрезок KF является перпендикуляром к плоскости АВС.

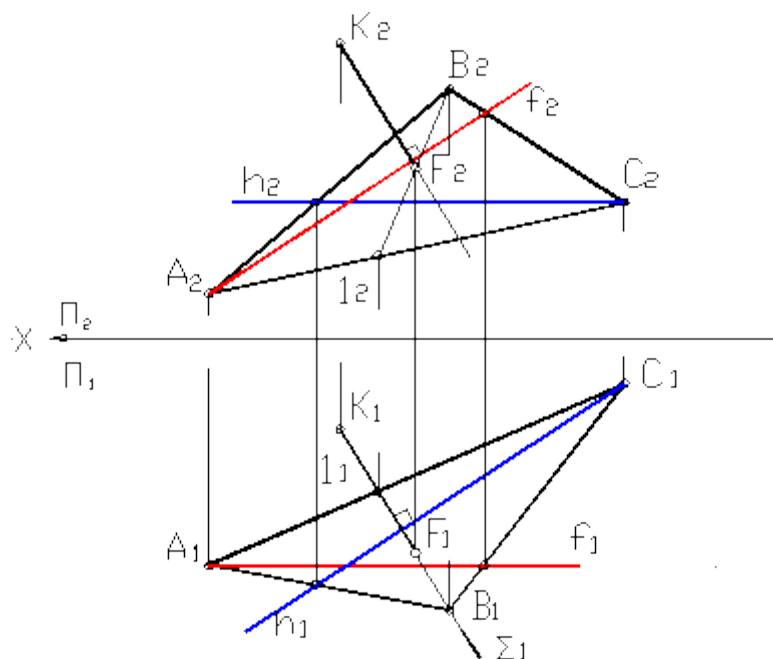


Рисунок 29

На рисунке 29 изображено построение перпендикуляра KF к плоскости ABC.

**Условие перпендикулярности плоскостей**

Две плоскости перпендикулярны, если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна двум пересекающимся прямым другой плоскости. Построение плоскости перпендикулярной данной плоскости ABC показано на рисунке 30. Через точку M проводится прямая MN, перпендикулярная плоскости ABC. Горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна AC, так как AC является горизонталью, а фронтальная проекция перпендикулярна AB, так как AB – фронталь. Затем через точку M проводится произвольная прямая EF. Таким образом, плоскость перпендикулярна ABC и задана двумя пересекающимися прямыми EF и MN.

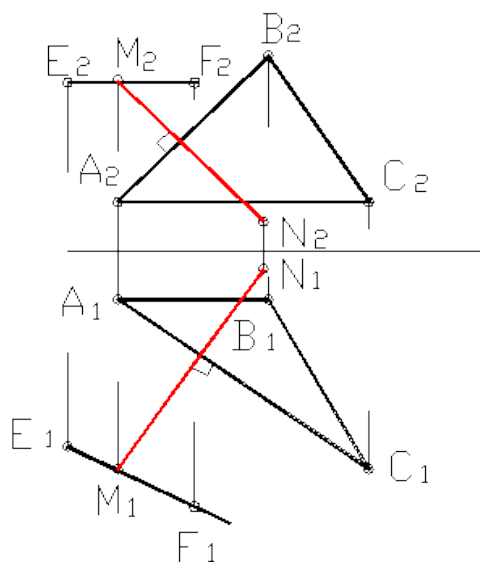


Рисунок 30

**4. Способ прямоугольного треугольника**

Этот способ применяется для определения натуральных величин отрезков общего положения, а также углов наклона их к плоскостям проекций. Для того, чтобы определить



натуральную величину отрезка этим способом, необходимо достроить прямоугольный треугольник к одной из проекций отрезка. Другим катетом будет являться разность высот или глубин конечных точек отрезка, а гипотенуза – натуральной величиной.

Рассмотрим пример: на рисунке 31 дан отрезок АВ общего положения. Требуется определить его натуральную величину и углы его наклона к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций.

Проводим перпендикуляр к одному из концов отрезка на горизонтальной плоскости. Откладываем на нем разность высот ( $Z_A - Z_B$ ) концов отрезка и достраиваем прямоугольный треугольник. Гипотенуза его является натуральной величиной отрезка, а угол между натуральной величиной и проекцией отрезка – натуральной величиной угла наклона отрезка к плоскости  $\Pi_1$ . Порядок построений на фронтальной плоскости тот же самый. По перпендикуляру откладываем разность глубин концов отрезка ( $Y_A - Y_B$ ). Полученный угол между натуральной величиной отрезка и его фронтальной проекцией – это угол наклона отрезка к плоскости  $\Pi_2$ .

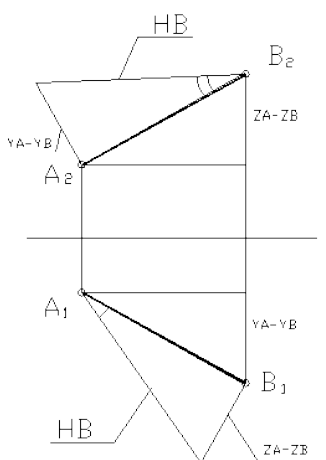


Рисунок 31

### **Вопросы для самопроверки**

1. Сформулируйте теорему о свойстве прямого угла.
2. В каком случае прямая перпендикулярна плоскости?
3. Сколько прямых и сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через точку пространства?
4. Для чего применяется способ прямоугольного треугольника?
5. Как при помощи этого способа определить угол наклона отрезка общего положения к горизонтальной плоскости проекций?

## **Лекция 5. Позиционные и метрические задачи.**

### **1. Виды, способы решения**

Позиционными называются задачи на определение каких-либо общих элементов геометрических объектов, например, **точки** пересечения прямой и плоскости, **линии** пересечения двух плоскостей.

#### *Пересечение прямой и плоскости*

Задачу на пересечение прямой и плоскости можно решать с помощью *вспомогательной секущей плоскости*, которая должна удовлетворять следующим условиям:

- быть плоскостью частного положения, так как именно плоскость частного положения проецируется на соответствующую плоскость проекций в виде прямой;
- проходить через прямую, точку пересечения которой с плоскостью мы отыскиваем.

*Метрическими* называются *задачи* по определению натуральной величины геометрических объектов (отрезка прямой или плоскости), либо кратчайшего расстояния между геометрическими объектами. Наиболее универсальным для решения таких задач принято считать *способ замены плоскостей проекций*, который заключается в следующем: оставляют неизменным положение в пространстве геометрического объекта, а заменяют одну или последовательно обе плоскости проекций так, чтобы интересующие нас прямые или плоскости оказались параллельными одной из новых плоскостей проекций.

Тогда одна из основных плоскостей проекций  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$  заменяется новой плоскостью проекций  $\Pi_4$ , подходящим образом расположенной относительно изображаемого геометрического объекта, но перпендикулярной незаменяемой плоскости проекций.

В результате замены одной из основных плоскостей на плоскость проекций  $\Pi_4$  получаем вместо старой системы плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  новую систему  $\Pi_1/\Pi_4$  если заменялась плоскость  $\Pi_2$ , и систему  $\Pi_2/\Pi_4$ , если заменялась плоскость  $\Pi_1$ . Более подробно эта тема рассматривается на практических занятиях.

## **Лекция 6. Способы преобразования чертежа.**

### **1. Классификация способов преобразования**

### **2. Способ вращения вокруг проецирующей оси**

### **3. Способ замены плоскостей проекций**

#### **1. Классификация способов преобразования**

Трудоемкость и точность графического решения задач часто зависит не только от сложности задач, но и от того, какое положение занимают геометрические фигуры по отношению к плоскостям проекций. Наиболее выгодными являются положения, параллельные плоскостям проекций или перпендикулярные им.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществить двумя путями:

а) перемещением в пространстве проецируемой фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проекций, которые при этом не меняют своего положения;

б) выбором новой плоскости проекций, по отношению к которой фигура, не имеющая своего положения в пространстве, окажется в частном положении. Первый путь лежит в основе способа плоскопараллельного перемещения, а второй - в основе способа замены плоскостей проекций.

Существует несколько способов плоскопараллельного перемещения:

1. Способ параллельного перемещения. При этом плоскости, по которым двигаются точки фигуры, параллельны плоскости проекций. Траектория - произвольная плоская линия;
2. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций. Траектории перемещаемых точек - дуги окружностей, центры которых находятся на оси вращения;
3. Способ вращения вокруг оси параллельной плоскости проекций (вокруг линии уровня).

## 2. Способ вращения вокруг проецирующей оси

Это частный случай параллельного перемещения. За траекторию движения точки принимается не произвольная линия, а дуга окружности, центр которой находится на оси вращения, а радиус равен расстоянию между осью вращения и данной точкой.

При вращении точки вокруг оси перпендикулярной,  $\Pi_2$ , фронтальная проекция точки перемещается по окружности, а горизонтальная - по прямой, перпендикулярной оси вращения. Если же точка вращается вокруг оси, перпендикулярной  $\Pi_1$ , то в горизонтальной плоскости траекторией ее движения будет окружность, а во фронтальной - прямая, перпендикулярная оси вращения. На рисунке 32 показано построение новых проекций точек при помощи способа вращения. На рисунке 32 а - вращение вокруг фронтально-проецирующей оси, на рисунке 32 б - вокруг горизонтально-проецирующей оси.

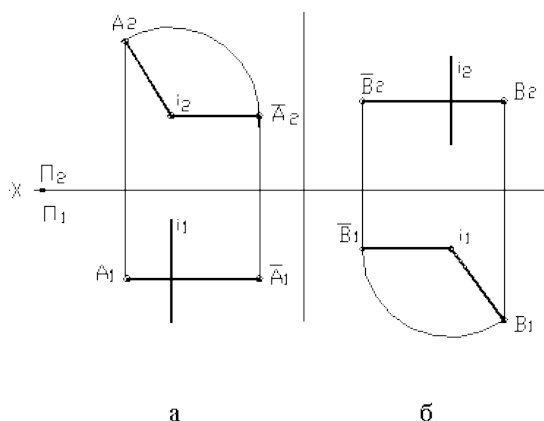


Рисунок 32

Этим способом удобно находить натуральные величины отрезков и фигур, занимающих проецирующее положение.

На рисунке 33 показан пример определения натуральной величины треугольника ABC, плоскость которого перпендикулярна  $\Pi_2$ . За ось вращения необходимо взять фронтально-проецирующую прямую, проходящую через точку, принадлежащую этой плоскости. В данном случае выбрана точка A - вершина треугольника. Плоскость треугольника вращается во фронтальной плоскости вокруг оси до положения, параллельного горизонтальной плоскости. Во фронтальной плоскости точки C и B перемещаются по окружностям, радиус которых равен расстоянию от оси вращения до фронтальных проекций точек. В горизонтальной плоскости траектории движения точек - прямые, перпендикулярные оси. Полученная проекция треугольника  $A'B'C'$ , является его натуральной величиной.



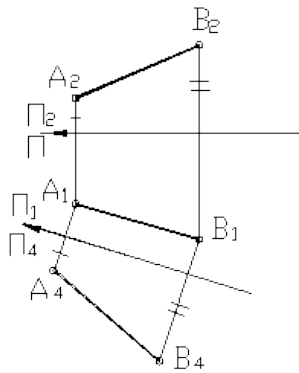


Рисунок 35

В некоторых случаях требуется замена двух плоскостей проекции. Например, при определении расстояния от точки до прямой. При этом прямую необходимо спроецировать в точку. На рисунке 36 отрезок общего положения переведен в проецирующее положение по отношению к плоскости  $\Pi_5$ .

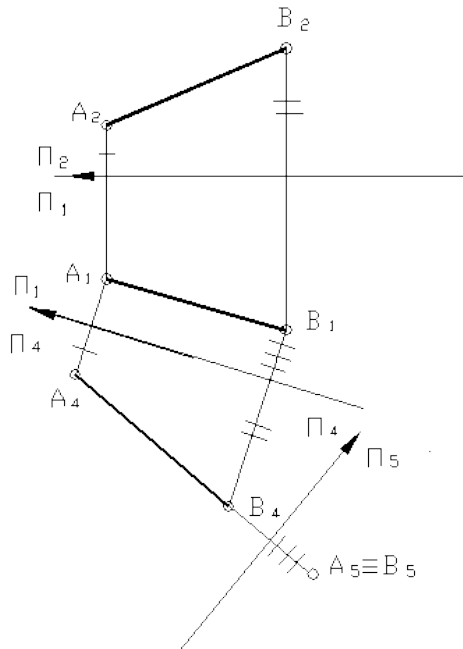


Рисунок 36

**Вопросы для самопроверки**

1. Назовите, какие вы знаете способы преобразования чертежа. Для чего они применяются?
2. Какие задачи можно решать при помощи способа вращения вокруг проецирующей оси?
3. По каким линиям перемещаются проекции точки при вращении вокруг горизонтально проецирующей оси?
4. Можно ли определить натуральную величину фигуры общего положения способом вращения вокруг проецирующей оси?
5. В чем суть способа замены плоскостей проекций?
6. Как построить проекцию точки в новой системе плоскостей проекций? Этапы построения.

7. Сколько замен нужно осуществить, чтобы перевести отрезок общего положения в проецирующее положение?

8. Как нужно выбрать новую плоскость, для того, чтобы сделать плоскость общего положения проецирующей?

## Лекция 7. Поверхности.

### 1. Способы образования поверхностей

### 2. Классификация поверхностей

### 3. Гранные поверхности

#### 1. Способы образования поверхностей

Поверхности являются самым сложным геометрическим объектом, изучаемым начертательной геометрией и инженерной графикой. Мир поверхностей безграничен. Он простирается от простейшей плоскости до причудливых поверхностей, используемых в архитектуре и скульптуре, от элементарного цилиндра до сложнейших по форме деталей авиадвигателя и т.п. Все, что нас окружает дома, машины, люди и т.д. – принадлежит к миру поверхностей. Поверхности в нашей жизни играют очень важную роль, особенно для инженера-конструктора, который должен знать и уметь, как сконструировать поверхность, чтобы она отвечала заранее заданным требованиям. А эта задача весьма трудоемка и часто бывает нелегко найти правильное решение. Рассмотрим некоторые общие вопросы образования и задания поверхностей, которые необходимо знать проектировщику при решении практических задач.

Определение поверхности. В математике под поверхностью понимается непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида  $F(x,y,z)=0$ , где  $F(x,y,z)$  – многочлен  $n$ -й степени или трансцендентная функция.

Начертательная геометрия изучает геометрические фигуры, заданные графически. Поэтому поверхность рассматривается как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии. Если принять, что положение движущейся в пространстве линии будет непрерывно меняться с течением, например, времени, и принять время за параметр, то поверхность можно рассматривать как непрерывное однопараметрическое множество линий. В свою очередь, линия определяется как непрерывное однопараметрическое множество точек. С учетом этого можно дать следующее определение поверхности: поверхностью называется непрерывное двухпараметрическое множество точек.

Существует два наиболее распространенных способа образования поверхностей: 1) при помощи движущейся линии; 2) при помощи движущейся поверхности. Рассмотрим указанные способы.

1. Пусть некоторая линия  $s$  (называемая образующей поверхности) непрерывно перемещается в пространстве, занимая последовательно положения  $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$  (рис.9.1). При движении линия может быть неизменной или непрерывно менять свою форму. Каждая точка  $A_j$ , принадлежащая линии  $s$ , при своем перемещении опишет некоторую траекторию  $t_j$ . Линии  $t$ , называются направляющими, так как их можно рассматривать как линии, по которым перемещается образующая  $s$ . Совокупность линий  $s_i$  и  $t_j$  образует каркас поверхности или сеть. Данный способ образования поверхностей называется кинематическим и является

основным в начертательной геометрии. Он широко используется в технике. Например, так происходит формообразование поверхностей при обработке деталей на металлорежущих станках с линейным контактом режущего инструмента (резца, фрезы и т.п.) и заготовки. В этом случае поверхность детали несет на себе «отпечаток» профиля инструмента. Поверхности, образованные таким способом, называются кинематическими.

2. В этом случае некоторая поверхность  $F$  (называемая производящей поверхностью) перемещается в пространстве, занимая ряд последовательных положений  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Совокупность всех положений поверхности  $F$  определяет некоторую новую поверхность  $\Phi$ , являющуюся огибающей этих поверхностей. Огибающая поверхность может касаться производящей поверхности по некоторой линии (например, ковш обычного или роторного экскаватора при рытье траншей, каналов, проходке тоннелей) или в точке (обработка некоторой выпуклой поверхности торцом сферической или пальцевой фрезы).

Кроме этих двух наиболее распространенных способов образования поверхностей в научных исследованиях по начертательной и прикладной геометрии применяются еще некоторые другие способы, такие, например, как способ конкурирующих поверхностей, способ мгновенных преобразований.

Суть способа конкурирующих поверхностей заключается в следующем. Пусть в пространстве заданы две конкурирующие поверхности, проекции которых на одну из плоскостей проекций совпадают всеми своими точками. Тогда две оставшиеся не совпавшие проекции (по одной от каждой поверхности) определяют новую поверхность. Этот способ является обобщением так называемых «ключевых» способов образования поверхности, когда искомая поверхность конструируется графически без применения аналитических расчетов.

Способ мгновенных преобразований, в отличие от предыдущего способа, является аналитическим. Он связан с заданием в пространстве некоторого преобразования  $T$ , определяемого уравнениями:

$$x' = f_1(x, y, z, t)$$

$$y' = f_2(x, y, z, t)$$

$$z' = f_3(x, y, z, t),$$

где  $t$  - переменный параметр.

Придавая параметру различные непрерывные значения, можно получить непрерывное множество преобразований  $T_1, T_2, \dots, T_j$ , зависящих от параметра  $t$ . Каждое отдельно взятое преобразование  $T_j$ , соответствующее значению параметра  $t_j$ , называется мгновенным преобразованием. Такое однопараметрическое множество размножает точку пространства в линию, линию пространства в поверхность, поэтому способ применяется для образования поверхностей. Совокупность аналитического выражения исходной образующей линии (если она задана математически) и преобразований дает уравнение

непрерывного каркаса сконструированной поверхности (о каркасе поверхности более подробно ниже).

## 2. Классификация поверхностей

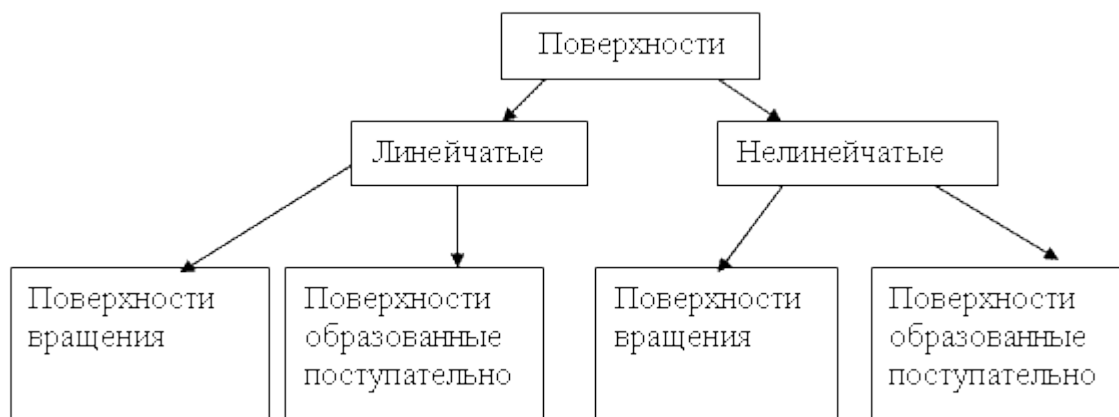


Рисунок 38

Линейчатые поверхности вращения – это конус, цилиндр.

Линейчатые поверхности поступательного движения – все гранные поверхности.

К нелинейчатым поверхностям вращения относятся сфера, шар, эллипсоид. Нелинейчатые поверхности, образованные поступательным движением – это гиперболический параболоид и другие сложные поверхности.

## 3. Гранные поверхности

Образующей является прямая линия, направляющая – ломаная. Гранная поверхность представляет из себя совокупность пересекающихся плоскостей – граней. Линии пересечения граней – ребра. Точки пересечения ребер – вершины.

Наиболее простой является призматическая поверхность. Она изображена на рисунке 39. Образующая  $l$  передвигается вдоль ломаной линии  $m$ , которая является направляющей. Все образующие поверхности параллельны.

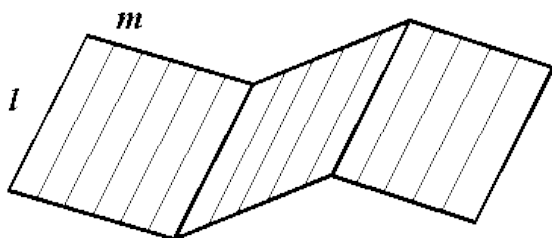


Рисунок 39

Призмой называется геометрическое тело, образующееся при ограничении призматической поверхности плоскостью, которое получается, если призматическую поверхность ограничить двумя основаниями. Основания будут иметь форму многоугольников, боковые грани параллелограммов. Если плоскости основания перпендикулярны боковым граням, то призма называется прямой, если нет то наклонной. Если в основании призмы лежит правильный многоугольник, то призма называется правильной.

Пирамидальная поверхность изображена на рисунке 40. Один конец образующей  $l$  неподвижен, а другой передвигается вдоль ломаной линии  $m$ .



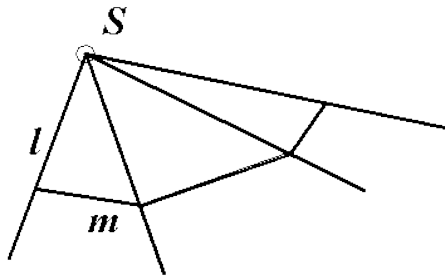


Рисунок 40

Пирамидой является геометрическое тело, образующееся при ограничении призматической поверхности плоскостью, которая будет называться основанием. Точка S-вершина пирамиды. Боковые грани – треугольники. Пирамида будет называться правильной, если в основании лежит правильный многоугольник, а высота опущенная из вершины попадает в центр основания.

**Вопросы для самопроверки**

1. Что называется поверхностью? Какие способы образования поверхностей вы знаете?
2. Назовите линейчатые поверхности вращения.
3. Какие нелинейчатые поверхности вы знаете?
4. Какая линия является направляющей у гранных поверхностей, какая является образующей?
5. Как образуется поверхность пирамиды, призмы?
6. Какая призма называется прямой?

**Лекция 8. Сечение гранных поверхностей плоскостями.**

- 1. Построение сечения призмы плоскостью частного положения**
- 2. Построение развертки призмы**
- 3. Построение сечения пирамиды плоскостью частного положения**
- 4. Построение развертки усеченной части призмы**

**1. Построение сечения призмы плоскостью частного положения**

Построение сечения призмы плоскостью частного положения

Сечением называют плоскую фигуру, которая получается при пересечении поверхности с плоскостью.

Определение проекций сечения следует начинать с построения опорных точек, расположенных на очерковых образующих поверхности, на ребрах, осях симметрии.

На рисунке 41 показано построение сечения прямой треугольной призмы плоскостью S, которая является фронтально – проецирующей. При этом фронтальная проекция сечения уже определена - это линия (1,2,3). Точки 1, 2, 3 - точки пересечения плоскости с ребрами призмы, - называются опорными.

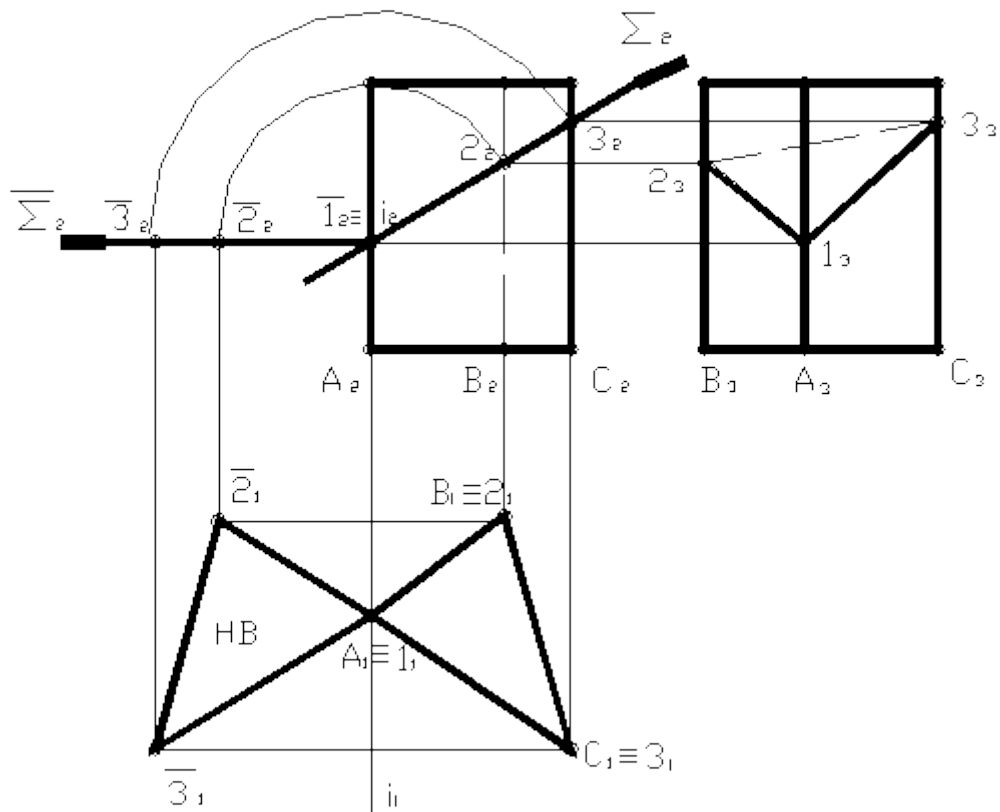


Рисунок 41

Горизонтальная проекция сечения совпадает с проекцией призмы, так как грани призмы являются горизонтально – проецирующими плоскостями. На профильной плоскости проекции точек сечения находим по линиям связи на соответствующих ребрах. Точка 1 принадлежит ребру А, точка 2 – ребру В, и 3 – ребру С. Проекции точек соединяем с учетом видимости. Линия ВС на профильной плоскости невидима, так как она принадлежит грани, которая на профильной плоскости невидима.

Натуральную величину сечения находим способом вращения. Ось вращения удобно выбрать в точке 1. Секущая плоскость поворачивается до положения, параллельного горизонтальной плоскости проекций. Из горизонтальных проекций точек сечения проводим линии перпендикулярно оси вращения или параллельно оси Х. И, таким образом, на горизонтальной плоскости получим натуральную величину сечения.

## 2. Построение развертки призмы

Построим полную развертку призмы. Она будет состоять из прямоугольников, которыми являются боковые грани, и двух треугольников – верхнего и нижнего оснований. На развертке откладываются только натуральные величины сторон и углов. Натуральную величину боковых ребер – высоту призмы, возьмем на фронтальной проекции, а натуральные величины сторон основания – с горизонтальной проекции, так как основания параллельны горизонтальной плоскости.

Для того чтобы построить развертку усеченной части призмы, необходимо отметить на ней точки 1, 2, 3 и убрать часть, отсеченную плоскостью S. Затем пристроить к развертке натуральную величину сечения. Развертка усеченной части призмы изображена на рисунке 42.

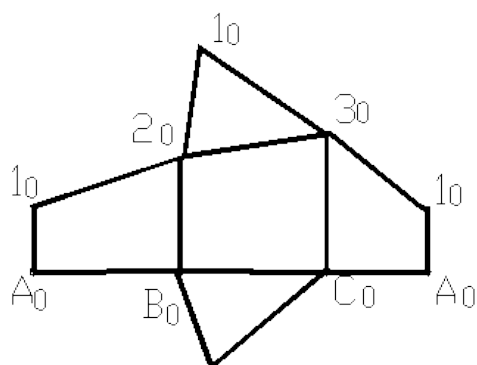


Рисунок 42

### 3. Построение сечения пирамиды плоскостью частного положения

Возьмем правильную четырехгранную пирамиду и построим ее сечение фронтально – проецирующей плоскостью  $S$ . Находим проекции опорных точек – точек пересечения ребер с секущей плоскостью. На рисунке 43 изображены три проекции сечения пирамиды и требуемые построения.

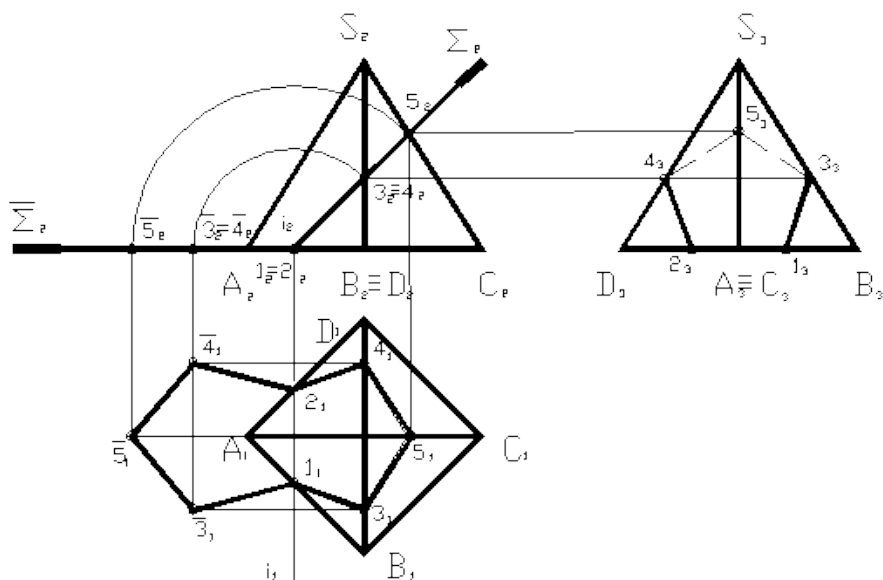


Рисунок 43

Натуральную величину сечения пирамиды строим методом вращения вокруг проецирующей оси. Ось вращения выбираем проходящей через точки 1 и 2 секущей плоскости. Построения проводим аналогично примеру с призмой.

### 4. Построение развертки усеченной части пирамиды

Отметим точку  $S_0$  – вершину пирамиды и проведем из нее луч в произвольном направлении. На этом луче отложим натуральную величину любого бокового ребра, например  $AS$ . Оно параллельно фронтальной плоскости проекций, поэтому величина  $A_2S_2$  будет являться натуральной величиной ребра  $SA$ , а так как пирамида правильная, то все ее боковые ребра равны. Затем строим треугольник, соответствующий боковой грани  $ASB$ . Натуральную величину стороны  $SB$  возьмем с горизонтальной проекции пирамиды, так как ее основание параллельно горизонтальной плоскости. Затем строим развертки остальных граней.

На боковых ребрах и сторонах основания откладываем высоты точек сечения и пристраиваем натуральную величину сечения. На рисунке 44 построена полная развертка усеченной части пирамиды.

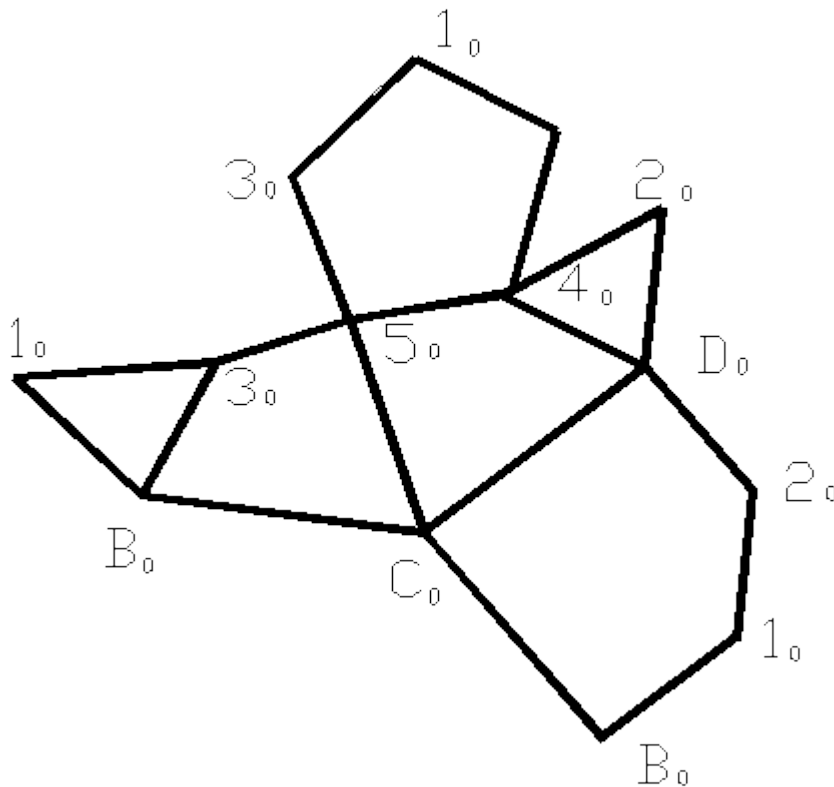


Рисунок 44

**Вопросы для самопроверки**

1. Какие точки нужно выбрать для построения проекций сечения призмы плоскостью частного положения?
2. С чем совпадает горизонтальная проекция сечения прямой призмы фронтально проецирующей плоскостью?
3. Для чего нужна базовая плоскость?
4. Какую фигуру представляет развертка боковой поверхности призмы?
5. Как построить проекции точки, принадлежащей боковой грани пирамиды?
6. Каким образом строится развертка пирамиды?

**Лекция 9. Поверхности вращения.**

**1. Образование поверхностей вращения**

**2. Частные виды поверхностей вращения**

**3. Конические сечения**

**1. Образование поверхностей вращения**

Поверхностью вращения общего вида называется поверхность, которая образуется произвольной кривой (плоской или пространственной) при ее вращении вокруг неподвижной оси (рис. 45). Каждая точка образующей при вращении вокруг оси описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называют параллелями. Наибольшую из них называют экватором, наименьшую – горлом. Плоскости, проходящие через ось вращения, называют меридиональными, а линии, по которым они пересекают поверхность, – меридианами. Плоскость, параллельную

плоскости проекций, называют главной меридиональной плоскостью, а линию пересечения ее с поверхностью – главным меридианом.

При задании поверхности вращения на чертеже указывают проекции ее оси, главного меридиана и экватора.

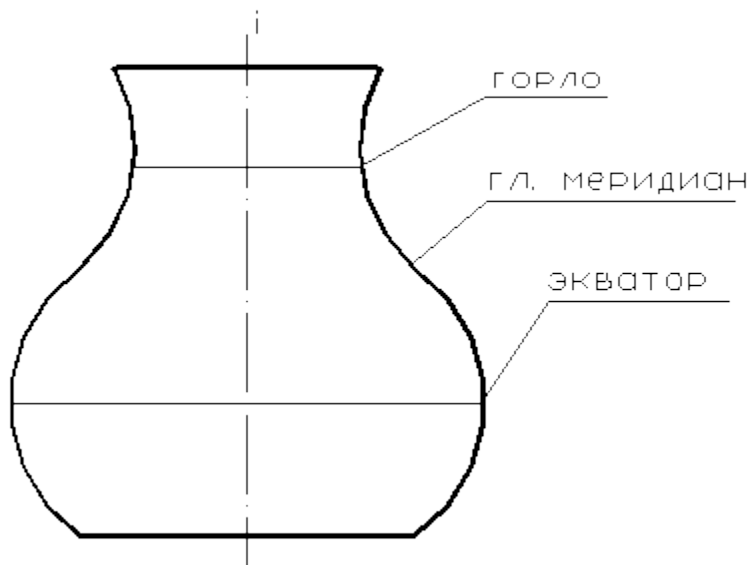


Рисунок 45

## 2. Частные виды поверхностей вращения

Существует широкий класс поверхностей вращения, у которых образующей является прямая линия. Из них наиболее известны цилиндрическая и коническая поверхности. Цилиндрическая поверхность образуется при вращении прямой линии вокруг оси, параллельной ей. Расстояние от оси  $i$  до прямой  $l$  называется радиусом.

Если образующая не параллельна оси, то поверхность носит название конической. Точка пересечения оси и образующей называется вершиной. На рисунке 46 изображены цилиндрическая и коническая поверхности.

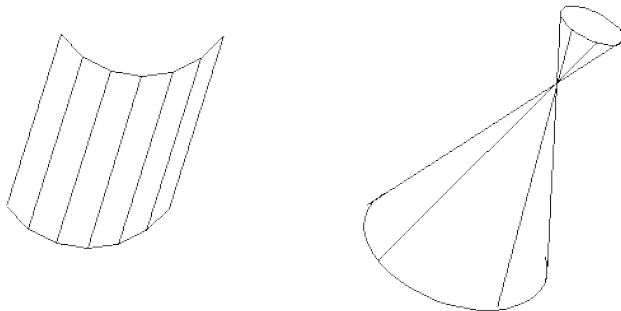


Рисунок 46

Рассмотрим поверхности, у которых образующей является окружность. Если ось вращения совпадает с одним из диаметров окружности, то такая поверхность носит название сферы.

Если же ось вращения не проходит через центр окружности, то образуется поверхность, называемая тором. Тор может быть открытым или закрытым. Открытый тор в том случае, когда расстояние от оси вращения до центра вращаемой окружности превышает ее радиус, и закрытым тор будет являться, если расстояние от оси до центра окружности меньше ее радиуса. На рисунке 47 изображены сфера и тор.

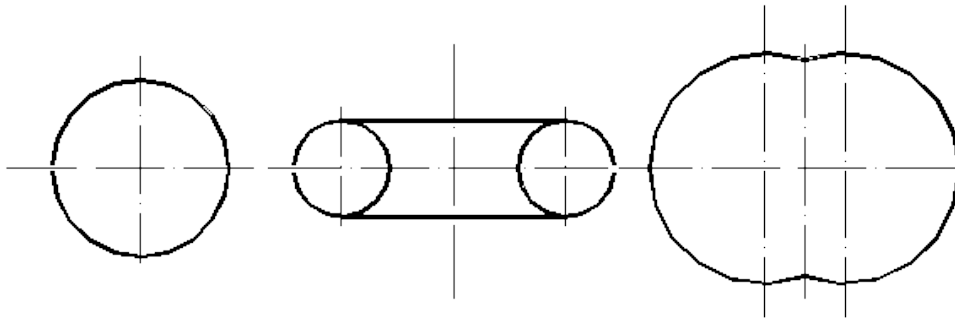


Рисунок 47

### 3. Конические сечения

Конус является универсальной поверхностью, при сечении которой можно получить все виды плоских кривых - окружность, эллипс, параболу и гиперболу. Если же секущая плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении получим прямые линии - образующие конуса.

На рисунке 48 показаны возможные варианты пересечения конуса плоскостями, при которых получаются различные виды плоских кривых.

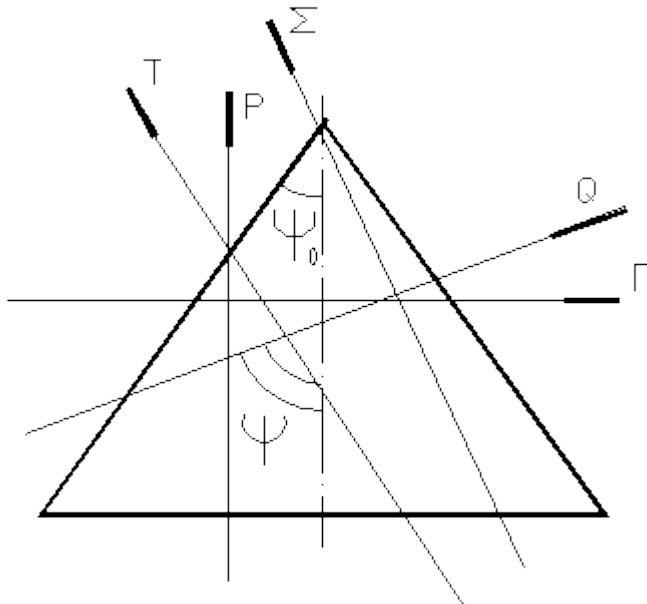


Рисунок 48

Горизонтальная плоскость  $\Gamma$  дает в сечении окружность. Угол наклона этой плоскости к оси конуса  $\psi = 90^\circ$ . Плоскость  $T$ , параллельная одной из образующих конуса, то есть имеющая такой же угол наклона к оси  $\psi = \psi_0$ , дает в сечении параболу.

Если угол наклона секущей плоскости меньше угла конуса  $\psi < \psi_0$  - плоскость  $P$ , то в сечении получается гипербола.

В случае  $\psi > \psi_0$  - плоскость  $Q$ , в сечении будет эллипс.

#### **Вопросы для самопроверки**

1. Какая линия называется экватором поверхности вращения?
2. Как образуется открытый и закрытый тор? Как они выглядят?
3. Назовите плоские кривые, образующиеся при сечении конуса различными плоскостями.
4. Как должна быть расположена секущая плоскость, чтобы в сечении конуса получилась параболу?

## Лекция 10. Сечение поверхностей вращения плоскостями частного положения.

1. Построение сечения цилиндра
2. Построение развертки цилиндра
3. Построение сечения конуса. Определение натуральной величины сечения
4. Построение развертки усеченной части конуса

### 1. Построение сечения цилиндра

Цилиндром будет называться геометрическое тело, полученное при ограничении цилиндрической поверхности двумя параллельными плоскостями - основаниями цилиндра. Если в основании цилиндра лежит окружность, а образующая перпендикулярна основанию, то цилиндр называется прямым круговым.

Линия сечения строится также при помощи опорных точек - точек пересечения секущей плоскости с очерковыми образующими и осью цилиндра. Но необходимо взять также промежуточные точки для более точного построения линии сечения. На рисунке 49 показано построение проекций сечения цилиндра фронтально - проецирующей плоскостью  $S$ . Так как цилиндр является проецирующей поверхностью, то горизонтальная проекция сечения совпадает с секущей плоскостью и на профильной проекции получим эллипс. Точки 2 и 3 будут являться границей видимости линии сечения для профильной плоскости.

Натуральную величину сечения можно определить способом вращения. Ось вращения выбираем в точке 1 и вращаем секущую плоскость до положения, параллельного горизонтальной плоскости. На горизонтальной плоскости получим эллипс, который будет являться натуральной величиной сечения цилиндра.

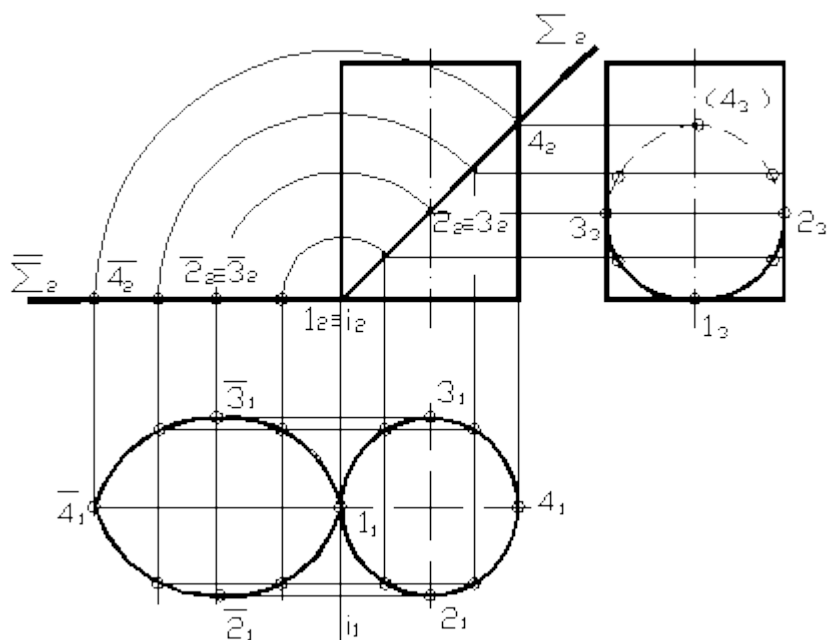


Рисунок 49

### 2. Построение развертки цилиндра

Разверткой цилиндра является прямоугольник с высотой, равной высоте цилиндра, и длиной, равной длине окружности основания  $2\pi R$ . Для того, чтобы построить развертку усеченной части, основание цилиндра делят на равные части, тем самым аппроксимируя

цилиндрическую поверхность призматической. Разделим окружность основания на 12 равных частей и отложим их вдоль горизонтальной линии развертки, по вертикали отложим высоту цилиндра (рис. 50).

Затем на полученных образующих отметим высоты точек сечения. Пристроим окружность основания и натуральную величину сечения.

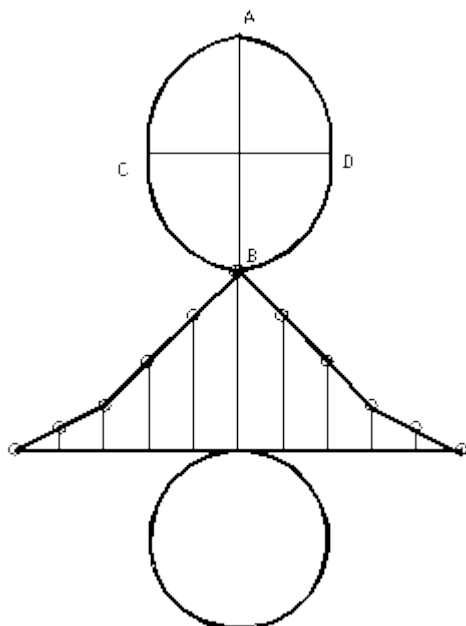


Рисунок 50

### 3. Построение сечения конуса. Определение натуральной величины сечения

Конус - это геометрическое тело, полученное путем ограничения конической поверхности плоскостью. Если в основании конуса лежит окружность, а высота попадает в центр основания, то конус называется прямым круговым.

На рисунке 51 построено сечение конуса фронтально - проецирующей плоскостью. Точки сечения находим при помощи вспомогательных секущих плоскостей. Точки С и D являются границей видимости для профильной проекции сечения.

Натуральную величину сечения находим способом вращения. Ось вращения выбираем в точке D и поворачиваем секущую плоскость до положения, параллельного горизонтальной плоскости проекций. Из горизонтальных проекций точек проводим линии, перпендикулярные оси вращения. Натуральной величиной сечения будет являться эллипс.



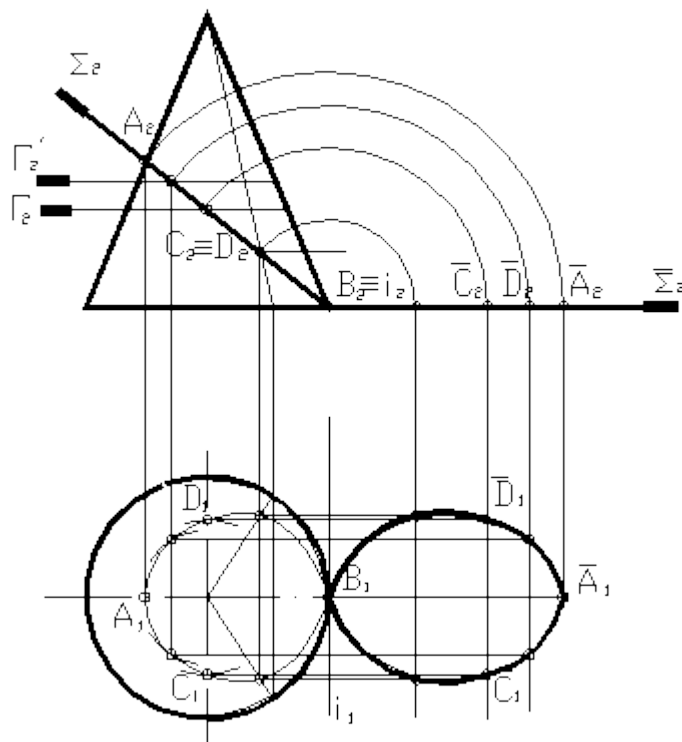


Рисунок 51

#### 4. Построение развертки усеченной части конуса

Развертка конуса является круговым сектором с радиусом, равным длине образующей конуса и длиной дуги, равной длине окружности основания конуса. Делим основание конуса на 12 равных частей и откладываем их по дуге на развертке. Затем на соответствующих образующих нужно отложить натуральные величины высот точек сечения. Чтобы получить полную развертку усеченной части, пристраиваем основание и натуральную величину сечения. На рисунке 52 показано построение развертки конуса.

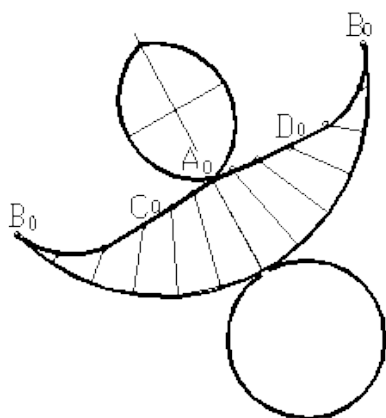


Рисунок 52

#### Вопросы для самопроверки

1. Как образуется цилиндрическая поверхность?
2. Если секущая цилиндра плоскость фронтально проецирующая, то где будут лежать горизонтальные проекции точек сечения?
3. Какими способами можно определять натуральную величину фигуры сечения?

4. Какой геометрической фигурой является развертка боковой поверхности цилиндра? Конуса?

5. Для чего нужно разбивать окружность основания на некоторое количество равных частей?

6. Как построить развертку конической поверхности?

7. Как получить из полной развертки поверхности развертку ее усеченной части?

## **Лекция 11. Взаимное пересечение поверхностей. Способ секущих плоскостей.**

### **1. Случаи взаимного пересечения поверхностей**

### **2. Способ вспомогательных секущих плоскостей**

#### **1. Случаи взаимного пересечения поверхностей**

При решении задач на взаимное пересечение поверхностей требуется, как правило, найти линию общую для двух или более поверхностей. В случае пересечения гранных поверхностей линией пересечения является ломаная, если пересекаются гранная поверхность и поверхность вращения, то это плоские кривые. Поверхности вращения пересекаются по пространственной кривой.

Существуют следующие случаи взаимного пересечения поверхностей:

1) частичное врезание - когда часть образующих или ребер одной поверхности пересекаются частью образующих или ребер другой. В этом случае линия взаимного пересечения представляет собой замкнутую пространственную кривую или ломаную;

2) полное проникание - когда все образующие или грани одной поверхности пересекаются с другой. В этом случае линия пересечения распадается на две отдельных кривых или ломаных;

3) одностороннее внутреннее соприкосновение - пересекающиеся поверхности имеют в одной точке общую плоскость касания. Кривая линия пересечения в этом случае пересекается сама с собой в точке касания;

4) двойное соприкосновение - пересекающиеся поверхности имеют две общие касательные плоскости. При этих условиях в пересечении участвуют все образующие одной поверхности и все образующие второй. В этом случае линия пересечения распадается на две плоские кривые, которые пересекаются в точке пересечения касательных плоскостей (теорема Монжа).

#### **2. Способ вспомогательных секущих плоскостей**

Для построения линии пересечения двух поверхностей их пересекают третьей поверхностью, которую называют посредником. В качестве вспомогательных поверхностей выбирают такие, которые пересекали бы данные поверхности по простым линиям - окружностям или прямым. Обычно поверхности - посредники - это плоскости или сферы.

Прежде чем решить вопрос, какую вспомогательную поверхность выбрать, следует выяснить, не занимает ли одна из данных поверхностей проецирующее положение, так как в этом случае решение задачи значительно упрощается. Одна из проекций линии пересечения будет совпадать с очерком проецирующей поверхности. И решение сводится к построению недостающей проекции линии, принадлежащей поверхности по одной ее проекции и по проекциям поверхностей.

Рассмотрим пример пересечения двух поверхностей вращения - конуса и цилиндра. Условие задачи дано на рисунке 53. Цилиндр является фронтально - проецирующей поверхностью, поэтому на фронтальной плоскости проекций линия пересечения будет

совпадать с очерком цилиндра. Выбираем опорные точки, лежащие на осях цилиндра и конуса, а также на очерке конуса. Проекции точек находим при помощи вспомогательных секущих плоскостей. Точки 4 и 5 являются границей видимости линии пересечения на горизонтальной плоскости.

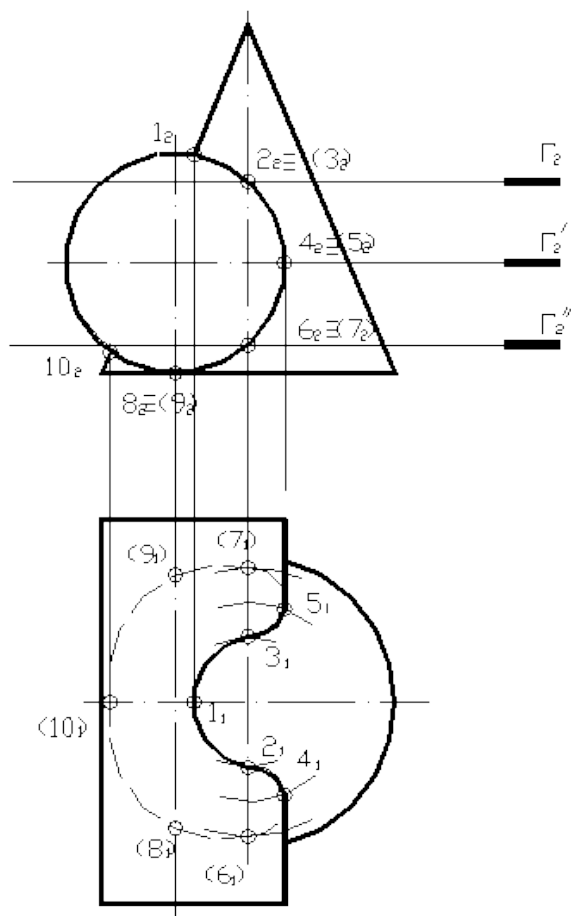


Рисунок 53

**Вопросы для самопроверки**

1. Какие бывают случаи взаимного пересечения поверхностей?
2. Какая линия получится при пересечении двух гранных поверхностей? Двух поверхностей вращения?
3. Какие точки называются опорными?
4. Как определять видимость линии пересечения и поверхностей?
5. Какие способы построения линии взаимного пересечения поверхностей вы знаете?

**Лекция 12. Взаимное пересечение поверхностей. Способ сфер.**

**1. Способ сфер**

**2. Частные случаи взаимного пересечения поверхностей.**

**3. Теорема Монжа**

**1. Способ сфер**

Этот метод вытекает из свойств, присущих поверхностям вращения: если центр секущей сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечет данную поверхность по окружностям, число которых равно числу точек пересечения главных

меридианов поверхностей. На рисунке 54 показано сечение конуса и цилиндра вспомогательной сферой.

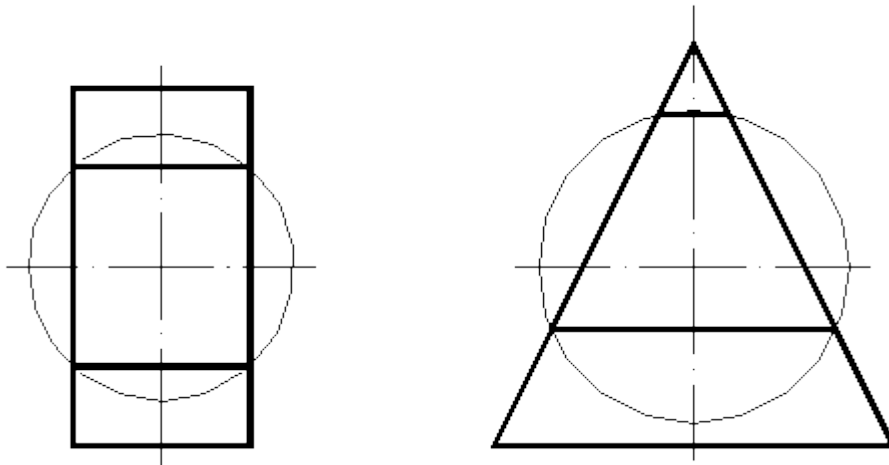


Рисунок 54

Способ сфер применяется в особом случае, когда поверхности вращения расположены так, что их оси пересекаются и параллельны одной из плоскости проекций.

Построение линии пересечения поверхностей вращения с помощью вспомогательных секущих сфер возможно двумя способами:

- 1) способом концентрических сфер;
- 2) способом эксцентрических сфер.

Первый применяется тогда, когда оси поверхностей - прямые линии, а второй - когда одна из осей является кривой.

Рассмотрим пример пересечения двух цилиндров разного радиуса. Оси их пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций. Поверхности изображены на рисунке 55.

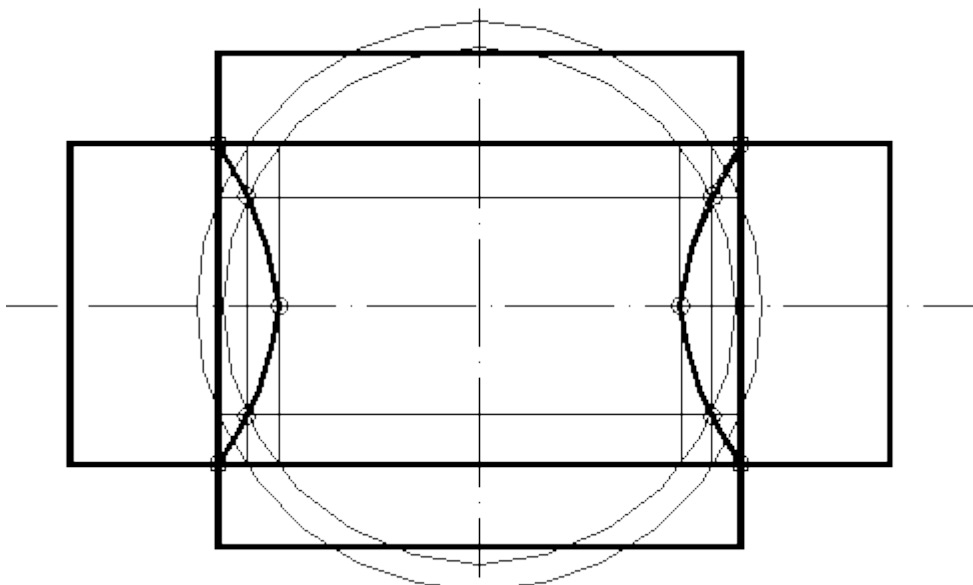


Рисунок 55

Первая сфера проводится так, чтобы она была вписана в поверхность большего диаметра, последующие сферы пересекают обе поверхности, а радиус последней сферы равен расстоянию до точек пересечения очерков.

Вспомогательные сферы пересекают цилиндры по окружностям, которые проецируются в прямые линии, проходящие через точки пересечения сфер с очерками цилиндров. Точки пересечения этих прямых и есть общие точки для двух поверхностей.

При построении линии пересечения этим способом все сферы проводятся из одного центра, которым является точка пересечения осей. В способе эксцентрических сфер центр секущей сферы передвигается вдоль оси поверхности, ось которой прямолинейна.

## 2. Частные случаи взаимного пересечения поверхностей. Теорема Монжа

Если две пересекающиеся поверхности вращения можно описать вокруг третьей, то линия пересечения в этом случае распадется на две плоские кривые. Примеры такого пересечения приведены на рисунке 56.

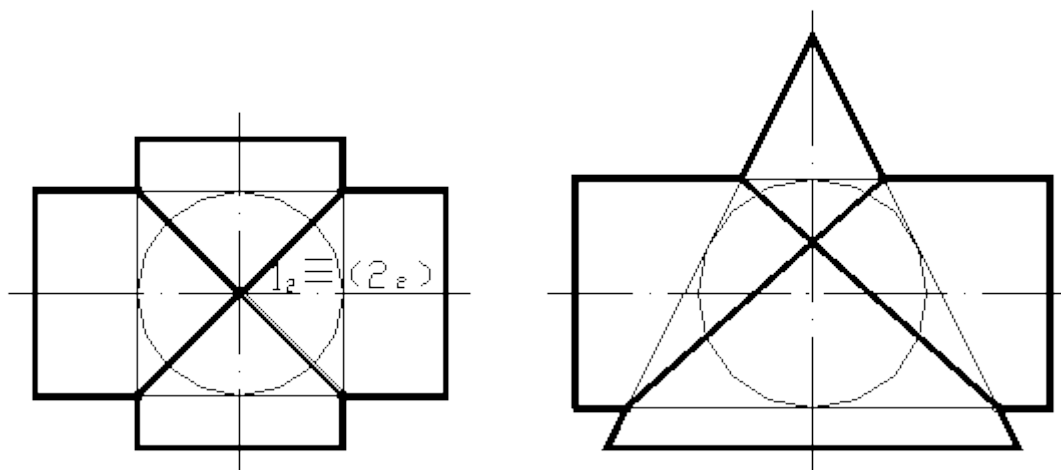


Рисунок 56

В рассмотренных примерах имеет место двойное соприкосновение пересекающихся поверхностей второго порядка. Эти поверхности могут быть описаны вокруг одной сферы. Данный случай относится к частным случаям взаимного пересечения поверхностей и описывается теоремой Монжа: две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка (или в нее вписанные), пересекаются между собой по двум кривым второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какое свойство поверхностей вращения лежит в основе способа сфер?
2. При каком расположении поверхностей возможно применение способа сфер для построения линии их взаимного пересечения?
3. В каком случае следует применять метод эксцентрических сфер, а в каком – концентрических?
4. Какие частные случаи пересечения поверхностей вы знаете?
5. Сформулируйте теорему Монжа.

### **Лекция 13. Тени.**

1. Тени в ортогональных проекциях
2. Тени основных геометрических фигур

Нанесением теней пользуются для придания проекционным чертежам большей наглядности. Особенно широко используются тени при оформлении архитектурных проектов, а также для решения ряда практических задач (например, для выявления

освещенности наружных или внутренних частей сооружения при определенных условиях, для определения размеров сооружения по отбрасываемой им тени и т.п.).

Различают собственные и падающие тени.

**СОБСТВЕННОЙ** называется тень, которая получается на неосвещенной поверхности предмета (или объекта) при освещении его каким-либо источником света (рис. 57).

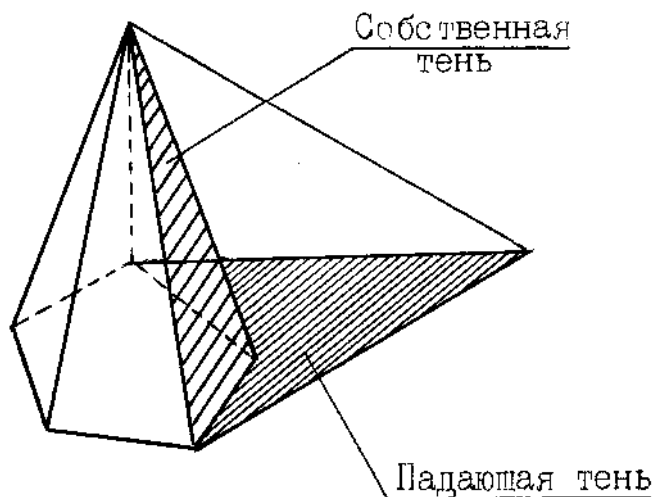


Рис. 57

**ПАДАЮЩЕЙ** называется тень, отбрасываемая предметом на плоскости проекций, или возникающая на поверхности предмета из-за того, что на пути лучей света расположен другой предмет.

Если предмет освещается источником света, находящимся на конечном расстоянии от него (факелом, лампой, свечой), то совокупность световых лучей, падающих на предмет, образует конус или пирамиду. Такая тень называется **ФАКЕЛЬНОЙ**.

Если же источник света находится в бесконечности, то совокупность световых лучей образует цилиндр или призму. Тень при этих условиях называется **СОЛНЕЧНОЙ**.

**НАПРАВЛЕНИЕ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ.** При построении теней в ортогональных проекциях, направление  $l$  лучей света обычно принимают параллельным диагонали куба, грани которого параллельны плоскостям проекций (рис. 58).

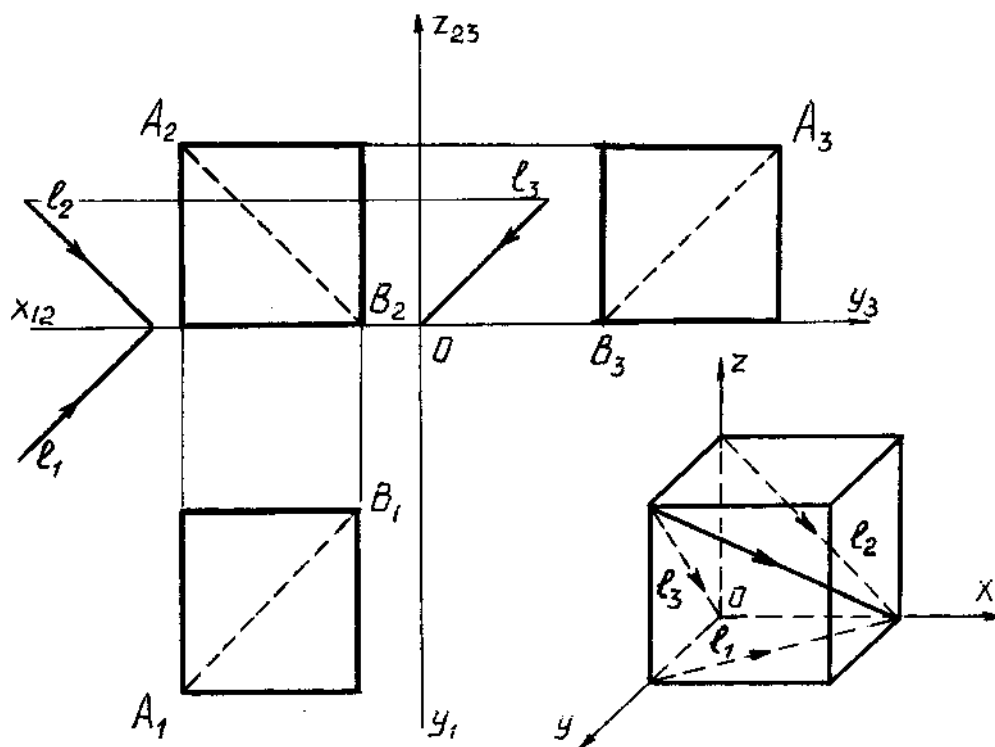


Рис. 58

Диагональ куба  $AB$  образует с плоскостями проекций углы, равные  $35^{\circ}16'$ , а проекции ее наклонены к плоскостям  $H$ ,  $V$ , и  $W$  под углом  $45^{\circ}$ .

При построении теней в аксонометрии, направление лучей света, параллельное диагонали куба, не всегда дает удачное расположение светотеней; в таких случаях следует выбрать другое направление, обеспечивающее выразительность чертежа.

#### ПАДАЮЩАЯ ТЕНЬ ОТ ТОЧКИ

Представим себе материальную точку  $A$  (рис. 59), расположенную в пространстве над плоскостью  $H$ , которая освещается световыми лучами, идущими из бесконечности параллельно заданному направлению  $l$ . Точка  $A$  задержит один из них и отбросит теневой луч, который пересечет плоскость  $H$  в точке  $A_T'$ . Эта точка и будет являться тенью точки  $A$ .

Иными словами, тень точки является следом теневого луча.

Итак, чтобы построить тень, падающую от точки на какую-либо плоскость или поверхность, необходимо через данную точку провести прямую, параллельную направлению лучей света, и определить точку пересечения этой прямой с плоскостью или поверхностью, на которую падает тень.

На рис. 75а в ортогональных проекциях и на рис. 75б в аксонометрии построены тени, падающие на плоскости  $H$ ,  $V$  и  $P(n \times m)$  от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

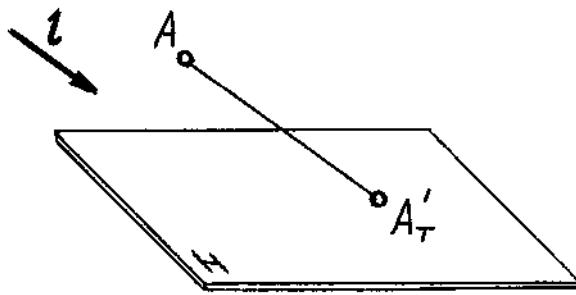


Рис. 59

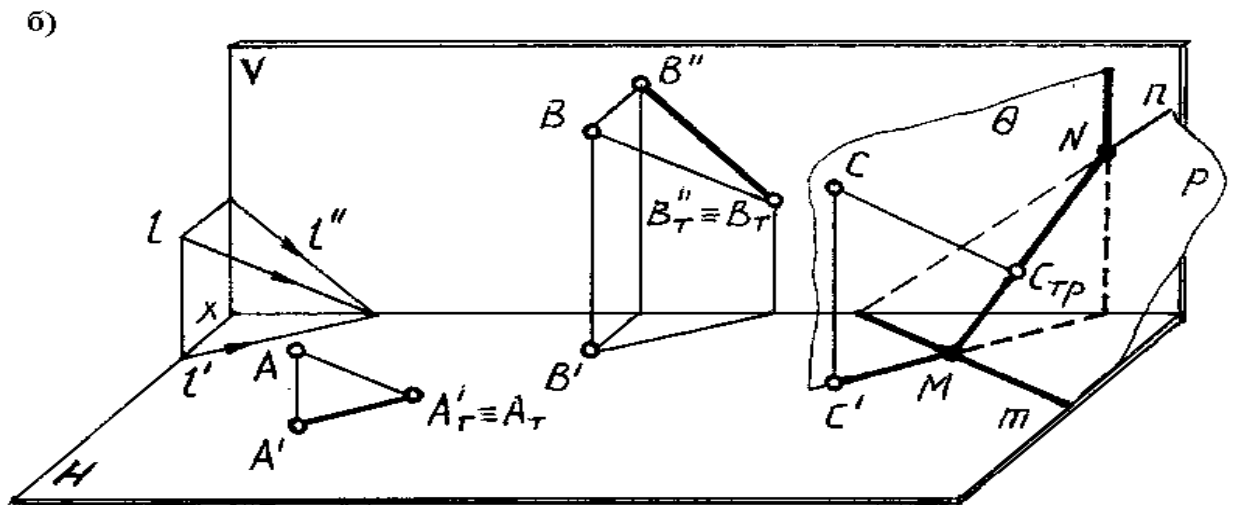
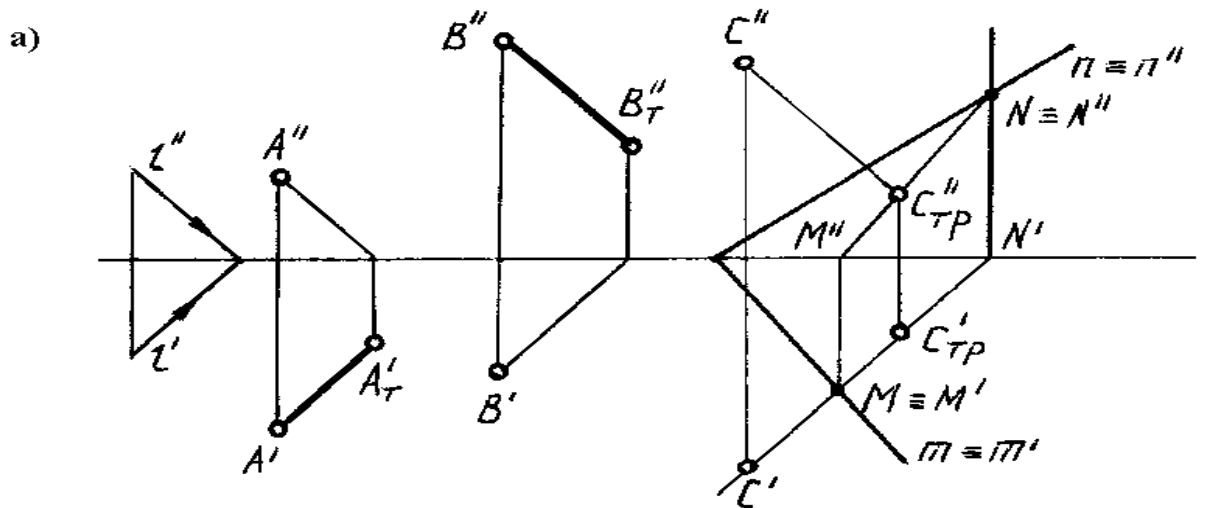


Рис. 60

Тень от точки  $A$  падает на плоскость  $H$  в точке  $A_T'$  (эта точка является горизонтальным следом луча  $AA_T$ ).

Тень от точки  $B$  падает на плоскость  $V$  в точке  $B_T''$  (эта точка является фронтальным следом луча  $AB_T$ ).

Тень от точки в аксонометрии определяется в результате пересечения луча с его вторичной проекцией.

Тень  $B_T''$  (в аксонометрии) можно построить как точку пересечения луча  $BB_T$  с его фронтальной проекцией  $B''B_T''$  или при помощи горизонтальной проекции луча.



Тень от точки  $C$  падает на плоскость  $P$  ( $n \times m$ ) в точке  $C_{\text{ТР}}$  ( $C_{\text{ТР}'}$ ,  $C_{\text{ТР}''}$ ), которая определяется в результате пересечения луча  $CC_{\text{Т}}$  с заданной плоскостью  $P$  при помощи горизонтально-проецирующей плоскости  $\Theta$ .

### ПАДАЮЩАЯ ТЕНЬ ОТ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Тень, падающая от прямой линии, состоит из падающих теней от всех ее точек. Лучи, проходящие через все точки прямой, образуют лучевую плоскость, а тень от прямой линии есть линия пересечения лучевой плоскости с плоскостью или поверхностью, на которую падает тень (то есть след лучевой плоскости).

Тенью, падающей от прямой на плоскость, является прямая линия, поэтому для ее построения достаточно построить тени от двух точек, принадлежащих этой прямой (рис. 61).

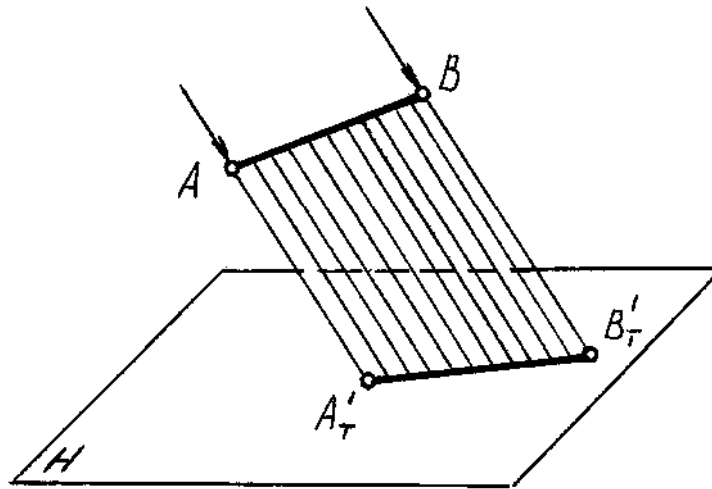


Рис. 61

На рис. 62 построена тень на плоскости проекций от отрезка  $AB$  на комплексном чертеже.

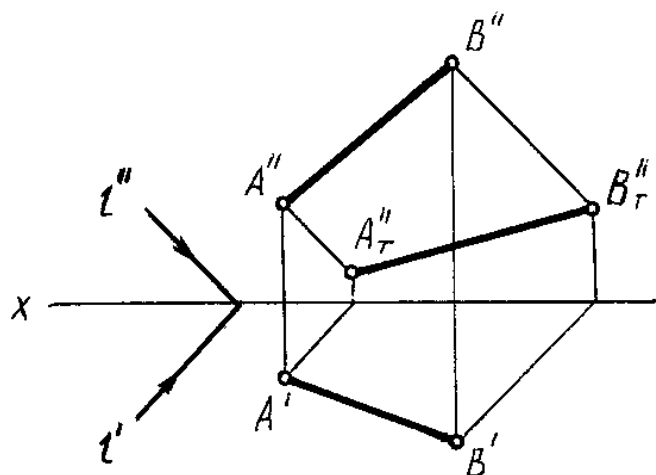


Рис. 62

Тени от точек  $A$  и  $B$  в этом примере падают на одну плоскость проекций  $V$ , поэтому для построения тени отрезка  $AB$  достаточно соединить между собой полученные точки  $A_{\text{T}}''$  и  $B_{\text{T}}''$  прямой линией.

ПРИМЕР. Построить падающую тень на  $H$  и  $V$  от отрезка прямой  $CD$  (рис. 63, 64).

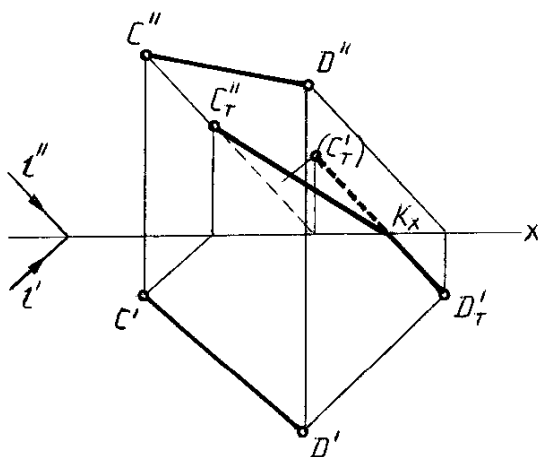


Рис. 63

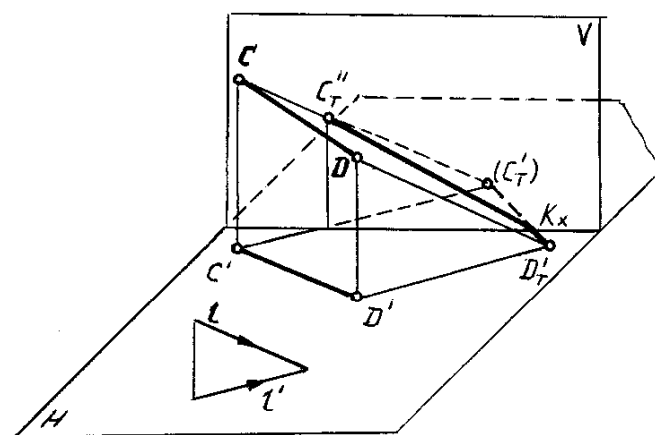


Рис. 64

Решение. Тень от отрезка  $CD$  падает на две плоскости проекций и представляет собой ломаную линию  $C_T''K_XD_T'$ . Точку перелома  $K_X$  можно определить двумя способами:

1) при помощи мнимой тени (рис. 78, 79).

Для этого строят тень отрезка на одну из плоскостей проекций, предполагая, что второй не существует. На рисунке сначала построена тень отрезка на плоскость  $H$  ( $C_T'D_T'$ ). Построенная тень пересекает ось  $OX$  в точке  $K_X$ , в этой точке тень переломится и с одной плоскости перейдет на другую (в точку  $C_T''$ ).

2) при помощи тени от промежуточной точки (рис. 65).

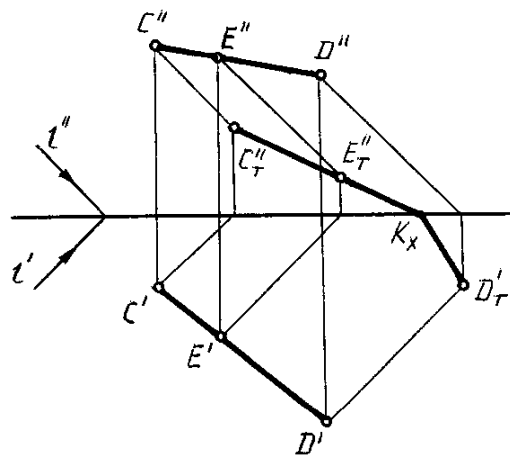


Рис. 65

На чертеже точка перелома  $K_X$  определяется при помощи тени от произвольной промежуточной точки  $E$  ( $E_T''$ ).

Тени от прямых, находящихся в частных положениях

ПРИМЕР. В ортогональных проекциях заданы отрезки частного положения  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$ . Построить тени, падающие от этих отрезков на плоскости проекций  $H$  и  $V$  (рис. 66).

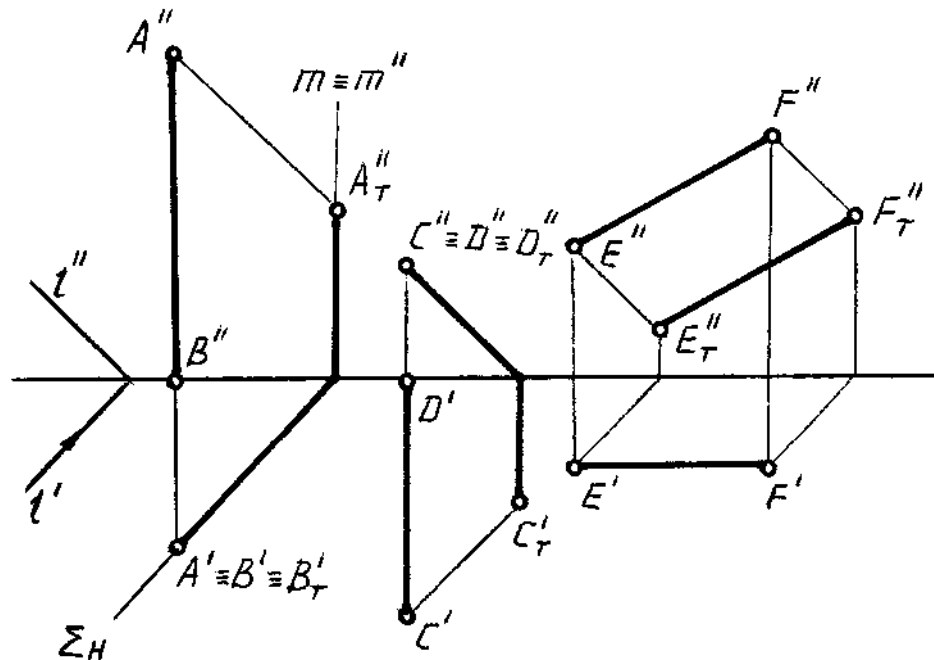


Рис. 66

**Решение.**

1. Отрезок  $AB$  занимает вертикальное положение, поэтому лучи, проходящие через все его точки, образуют вертикальную (горизонтально-проецирующую) лучевую плоскость  $\alpha$ , которая пересечет плоскость  $H$  по линии  $\alpha_H$ , а плоскость  $V$  — по вертикальной прямой  $m = m''$ . Следовательно, тень от вертикальной прямой линии на горизонтальной плоскости совпадает с горизонтальной проекцией (следом) лучевой плоскости.

Но, так как горизонтальная проекция лучевой плоскости параллельна горизонтальной проекции луча света, то для построения тени на горизонтальной плоскости проекций (от вертикальной прямой) достаточно через горизонтальную проекцию прямой (точку) провести горизонтальную проекцию луча света.

2. Отрезок  $CD$  перпендикулярен плоскости  $V$ , поэтому проходящая через него лучевая плоскость является фронтально-проецирующей плоскостью.

В ортогональных проекциях тень от прямой  $CD$  на плоскости  $V$  совпадает с проекцией лучевой плоскости.

3. Отрезок  $EF$  параллелен плоскости  $V$ . Его тень  $E_T''F_T''$  параллельна и равна данному отрезку.

**ВЫВОДЫ:**

1. Тень от прямой, перпендикулярной к плоскости, совпадает с ортогональной проекцией светового луча на эту плоскость.

2. Тень, падающая на плоскость от отрезка прямой, параллельной этой плоскости, параллельна и равна отрезку прямой. На комплексном чертеже проекция тени равна и параллельна проекции отрезка.

### ТЕНЬ ОТ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ (непрозрачной пластинки)

Чтобы построить падающую тень от плоской фигуры, ограниченной многоугольником, достаточно построить тени, падающие от всех сторон многоугольника.

На рисунке 67 построена тень, падающая от треугольника  $ABC$  на плоскости проекций  $H$  и  $V$ . Тень от вершины  $A$  падает на плоскость  $V$ , а от вершины  $B$  и вершины  $C$  — на плоскость  $H$ . Следовательно, тень от стороны  $BC$  падает на одну плоскость  $H$  и представляет прямую линию, а тени от сторон  $AB$  и  $AC$  падают на две плоскости и представляют ломаные линии.

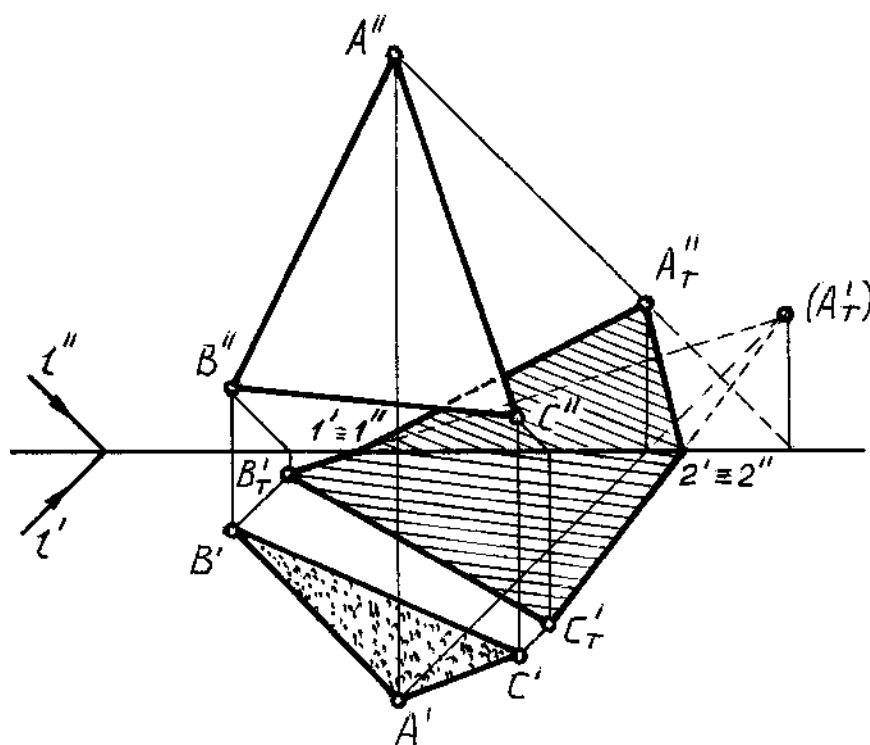


Рис. 67

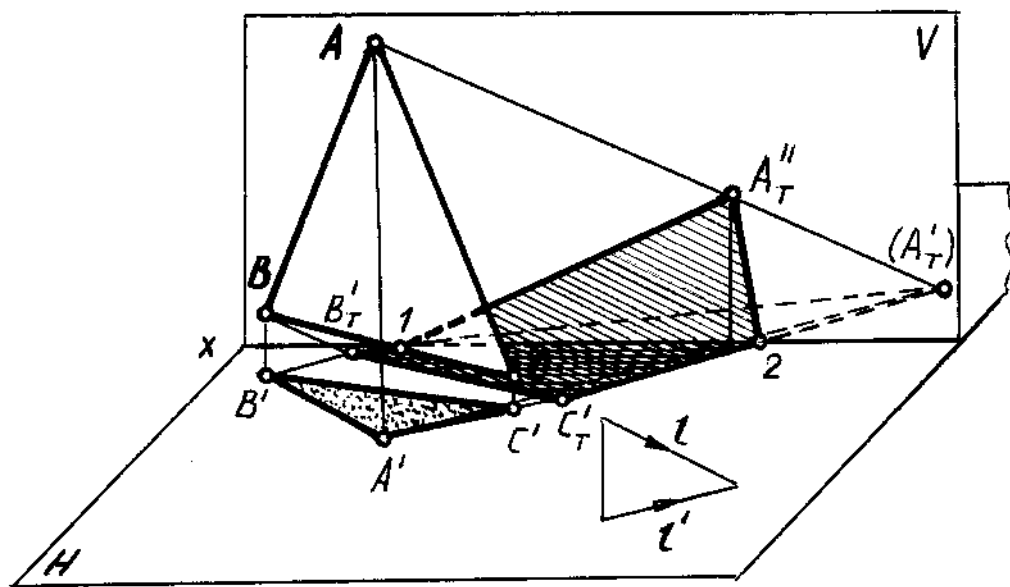
Падающие тени от сторон  $AB$  и  $AC$  можно построить при помощи промежуточных точек (как на чертеже 66) или при помощи мнимой тени  $(A_T')$ , падающей от точки  $A$  на заднюю полуплоскость  $H$ . Получив треугольник  $A_{ТН}B_{ТН}C_{ТН}$ , определяем на оси  $OX$  точки перелома 1 и 2 падающей тени и соединяем их с действительной тенью  $A_{ТВ}$  от точки  $A$  на плоскости  $V$ . Сторона плоской фигуры, обращенная к теневому столбу, находится в тени, то есть у плоских фигур следует различать освещенную и неосвещенную стороны. Иначе говоря, плоская фигура всегда имеет собственную тень.

Для выяснения освещенности сторон плоскости треугольника применяем следующий прием: обходя на исследуемой проекции периметр треугольника по часовой стрелке, замечаем порядок букв, обозначающих вершины, и сопоставляем с порядком букв, который получается при обходе по часовой стрелке контура падающей тени.

Совпадение порядка букв обозначает, что на данной проекции видима освещенная сторона треугольника, несовпадение — что видима неосвещенная сторона плоскости.

На рисунке контур падающей тени при его обходе по часовой стрелке дает порядок букв  $A_T''C_T''B_T''$ . Такой же порядок ( $A''C''B''$ ) получается на фронтальной проекции. Следовательно, на  $V$  видима освещенная сторона. Горизонтальная проекция имеет обратный порядок букв ( $A'B'C'$ ). Это значит, что на горизонтальной проекции к нам обращена неосвещенная сторона плоскости треугольника (сторона, находящаяся в собственной тени).

Этим же приемом можно пользоваться в аксонометрии (рис. 68).



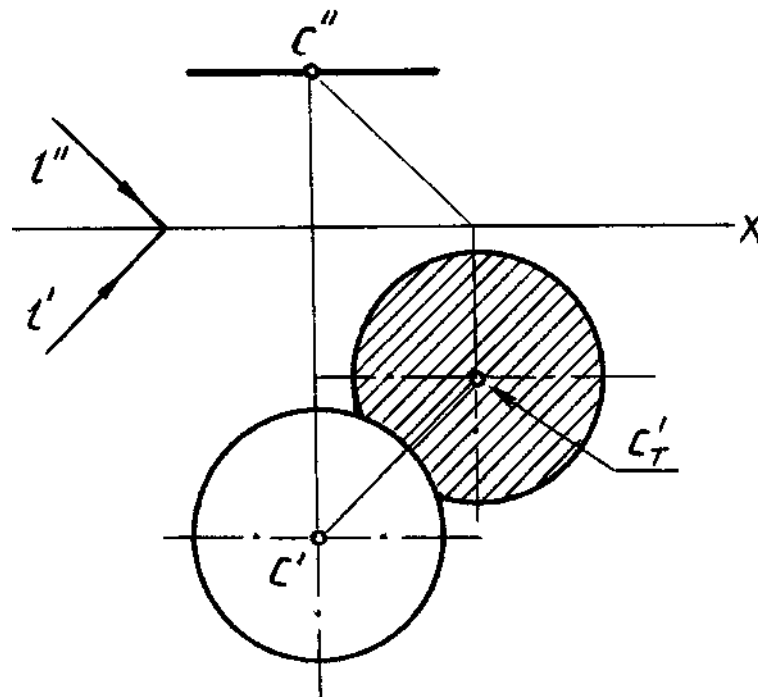
**Рис. 68**

### ТЕНЬ ОТ ДИСКА (окружности)

Если плоская фигура, бросающая тень, ограничена кривой линией, то лучи, проходящие через точки этой кривой, образуют цилиндрическую лучевую поверхность. В пересечении с плоскостью, на которую падает тень, эта поверхность дает контур падающей тени данной фигуры.

Если плоскость фигуры параллельна плоскости, на которую падает тень, то тень равна самой фигуре (так как равны параллельные между собой основания цилиндра).

На рис. 69 показано построение тени от круга, параллельного плоскости  $H$ , на плоскость  $H$ . Контуром тени является окружность того же радиуса. Для построения тени достаточно найти тень от центра  $C$ .



**Рис. 69**

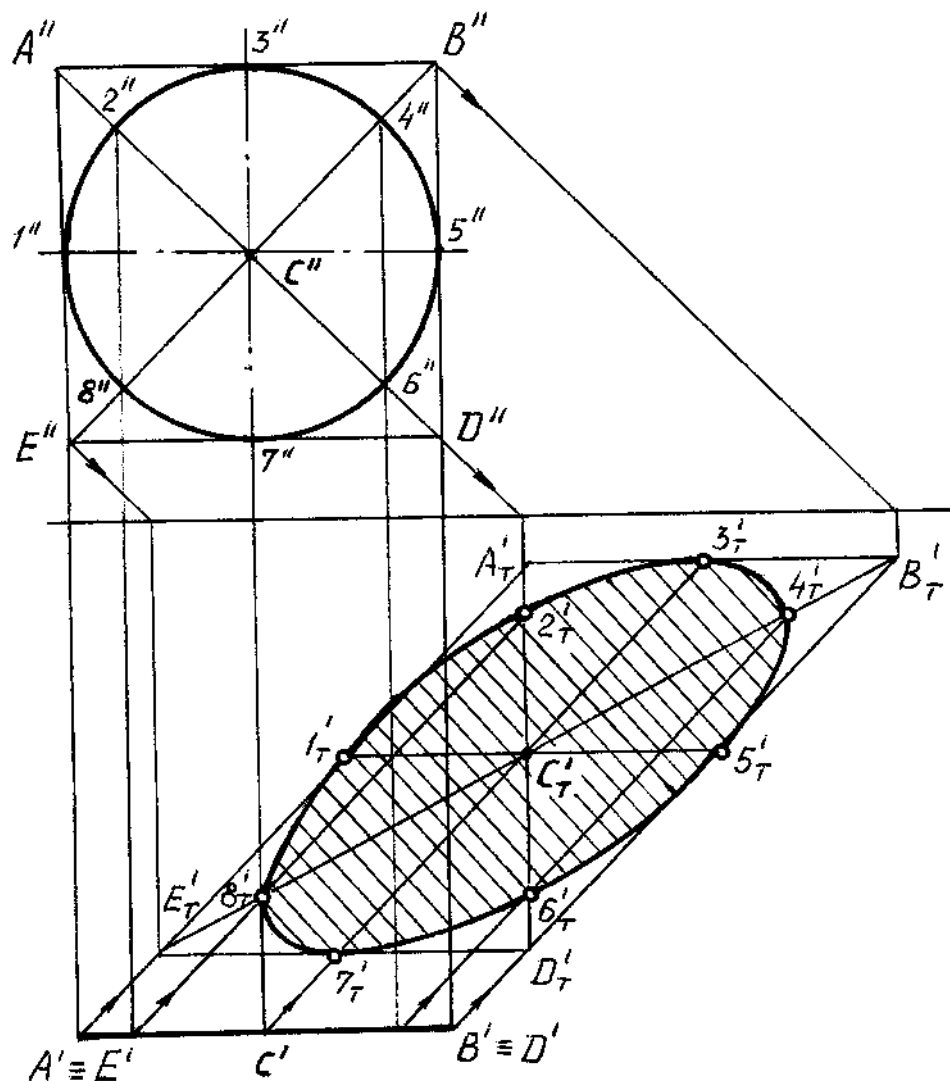
**Для построения тени, падающей от кривой линии на произвольно расположенную плоскость, можно применить один из двух способов.**

1. На кривой линии намечается достаточно большое число точек, от которых строится падающая тень. Полученные точки (падающей тени) соединяются между собой плавной кривой линией.

2. Около кривой линии описывается многоугольник, строится падающая тень от многоугольника и в нее вписывается тень кривой линии.

На рис. 70 для построения падающей тени от круга, параллельного плоскости V, на плоскость H использован описанный около него квадрат ABCD. Сначала строится падающая тень от сторон квадрата, его диагоналей и линий, проходящих через центр C параллельно сторонам квадрата, а затем вписывается в полученный параллелограмм кривая (эллипс). На рисунке эллипс проходит через восемь точек, принадлежащих одновременно падающим теням от окружности, сторон и диагоналей квадрата.

Если тень от кривой линии падает на две пересекающиеся плоскости, то она будет иметь излом на линии пересечения плоскостей.



**Рис. 70**

Тень, падающая от одной фигуры на другую

▬

7.3. Тень, падающая от одной фигуры на другую

**1. Метод обратных лучей**

Метод обратных лучей успешно применяется при построении теней, падающих от одной геометрической фигуры на другую, и характеризуется следующими построениями:

- а) строятся тени, падающие от обеих заданных фигур на какую-либо плоскость;
- б) выявляются точки пересечения теней от двух линий, из которых одна принадлежит контуру первой фигуры, а другая — контуру второй;
- в) при помощи обратных лучей (то есть лучей, параллельных лучам света, но имеющих обратное направление) “возвращаются” эти точки в пространство (на соответствующие контурные линии фигур);
- г) с помощью полученных точек определяется искомая тень, падающая от одной фигуры на другую.

ПРИМЕР.

На рис. 71— показано применение метода обратных лучей на примере построения падающей тени от прямой на плоскость треугольника.

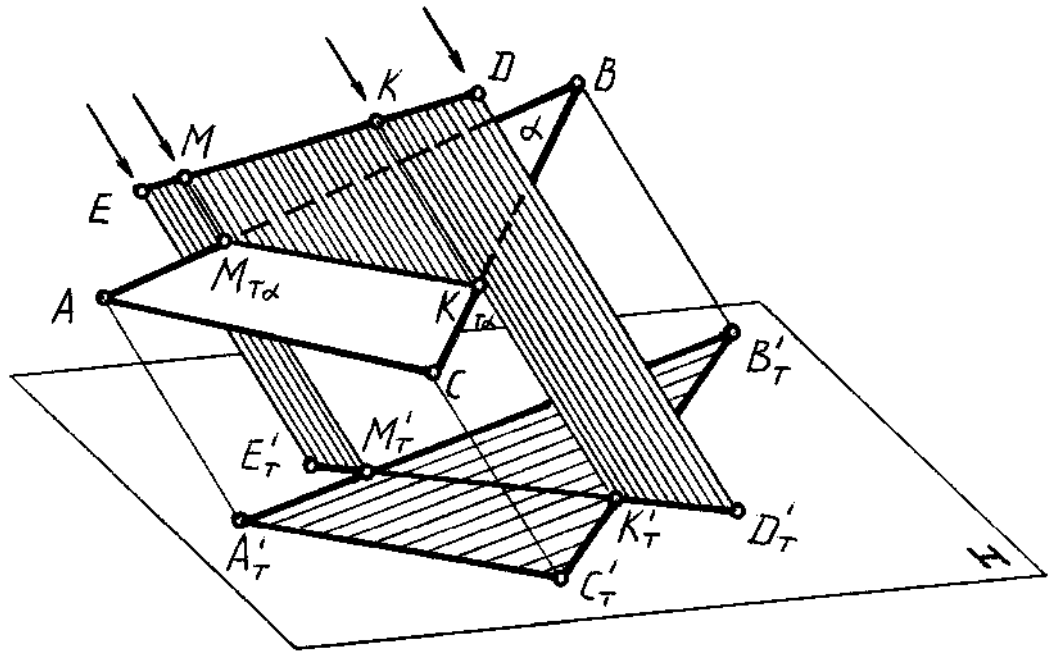


Рис. 72

Построены падающие тени от треугольника  $ABC$  и от прямой  $ED$  на плоскость  $H$ . Через точки  $M_T$  и  $M'_T$ , общие тням прямой  $ED$  и сторонам  $AB$  и  $BC$ , проведены обратные лучи, пересекающие указанные прямые соответственно в точках  $M''$ ,  $M'$ ,  $K''$  и  $K'$ . Точки  $M'$  и  $K'$  представляют собой тени от точек  $M''$  и  $K''$  прямой  $ED$  на стороны  $AB$  и  $BC$ . Искомая же тень будет определена точками  $M'K'$ .

На рис. 72 приведено решение этой задачи в ортогональных проекциях.

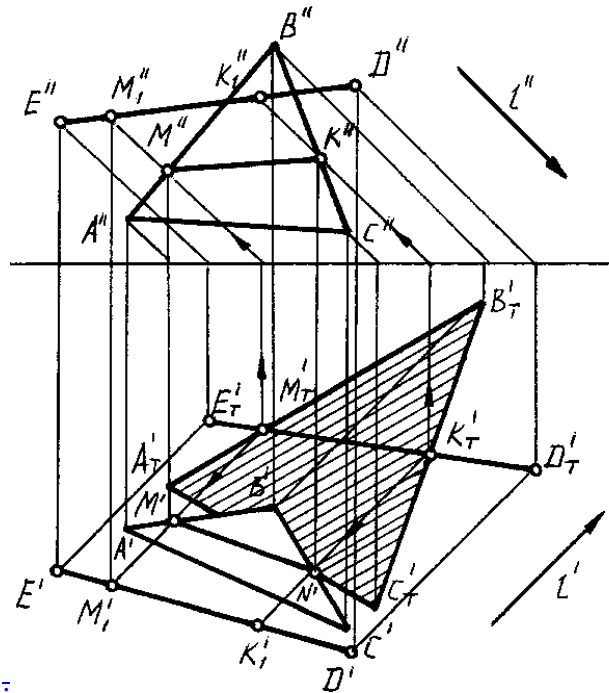


Рис. 73



## 2. Метод следа светового луча (метод сечения лучевой плоскостью)

Метод следа луча основан на том, что тень, падающая от точки, есть след проведенного через нее луча.

На рисунке 73 приведено решение задачи на построение тени от прямой  $AB$  на плоскость  $Q$  ( $CDEF$ ) в ортогональных проекциях методом следа луча (или сечения лучевой плоскости).

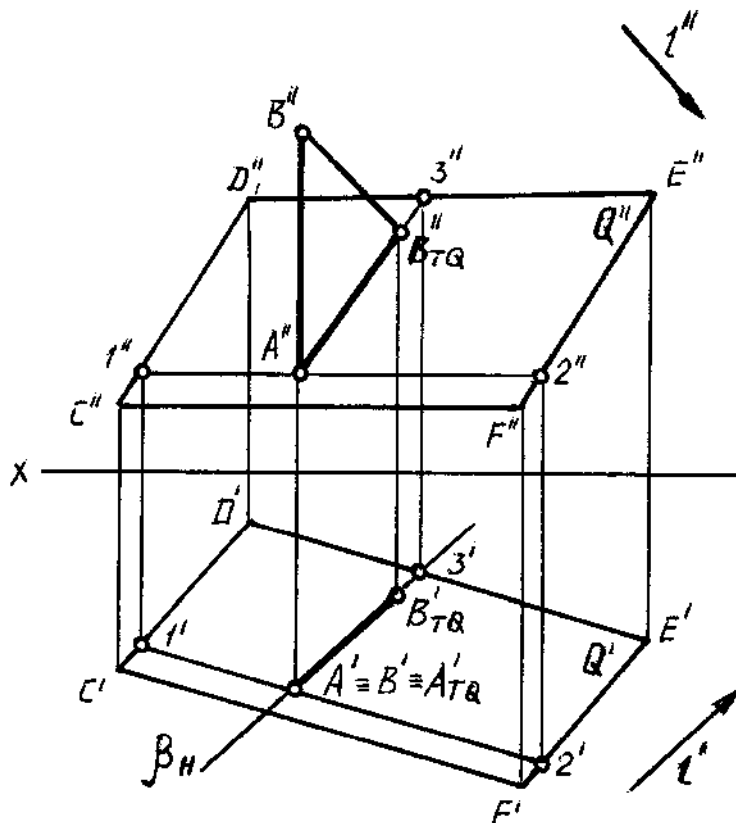


Рис. 74 В данном случае тень от прямой  $AB$  на плоскость  $Q$  построена с помощью двух точек  $A_{TQ}(A_{TQ}', A_{TQ}'')$  и  $B_{TQ}(B_{TQ}', B_{TQ}'')$ , в которых пересекаются с плоскостью  $Q(CDEF)$  соответственно данная прямая и световой луч, проходящий через точку  $B$ .

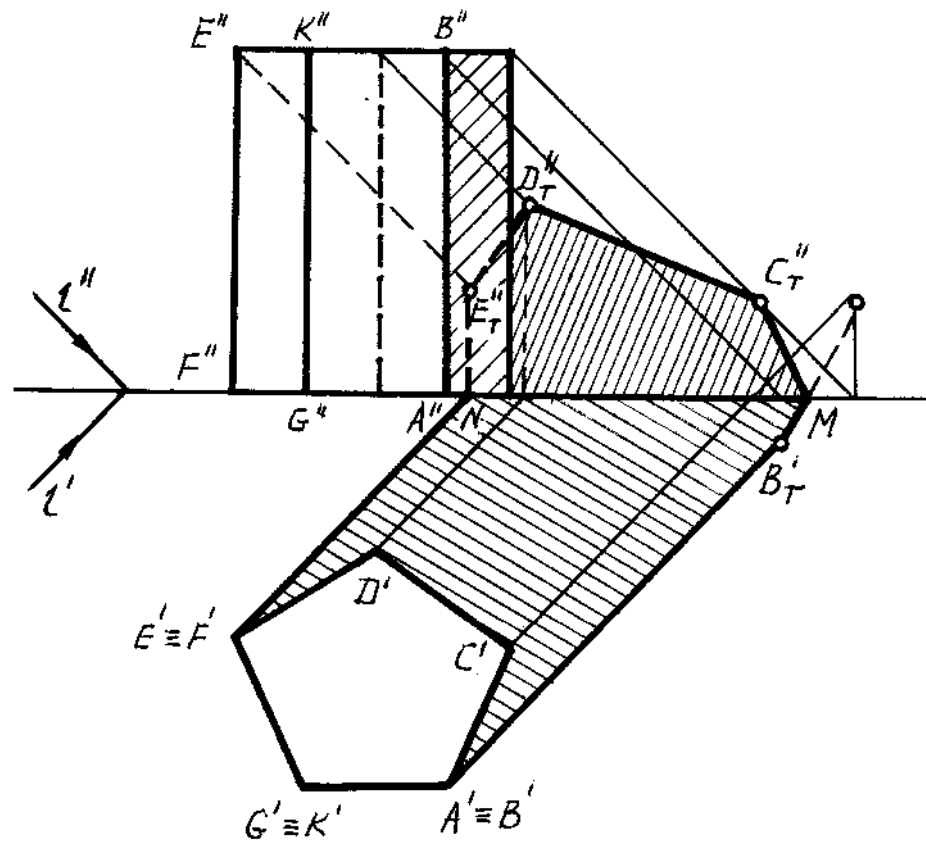
Плоскость  $\beta \perp H$  является лучевой плоскостью, которая проводится через луч  $BB_{TQ}$  для определения точки  $B_{TQ}(B_{TQ}', B_{TQ}'')$ .

Выше говорилось, что тени делятся на собственные и падающие. Определение собственной тени сводится к нахождению ее контуров, то есть линий, отделяющих освещенную часть поверхности от неосвещенной.

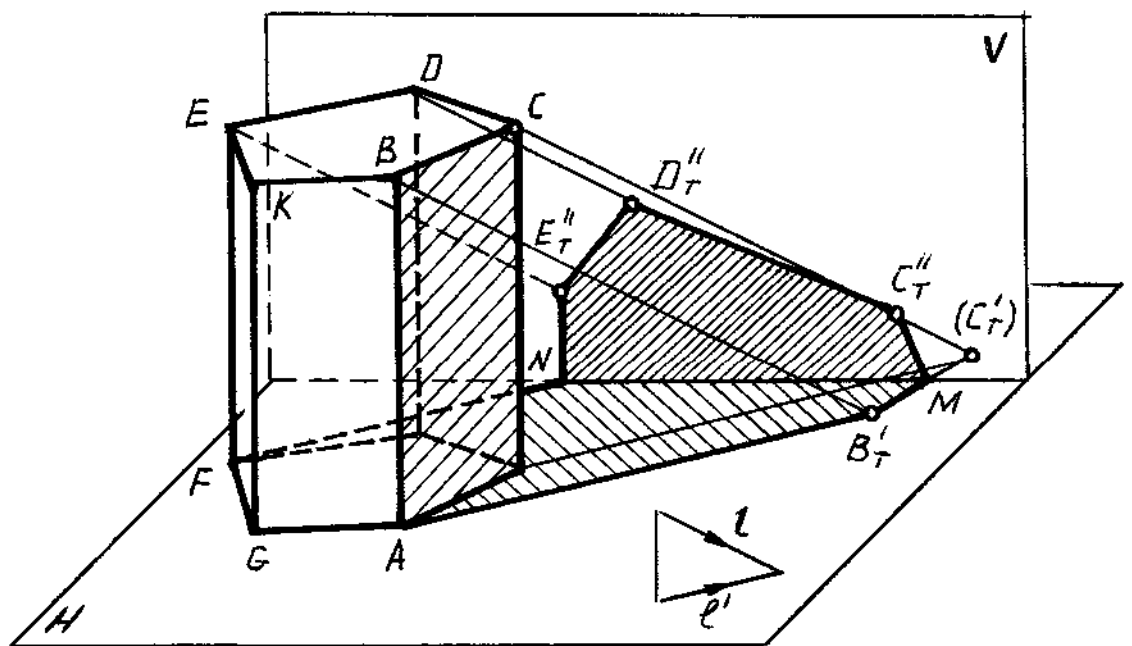
Контур падающей тени можно рассматривать как тень, падающую от контура собственной тени.

### Тени многогранников

На рисунке 75, 76 построены собственная и падающая тени прямой пятиугольной призмы.



**Рис. 751**



**Рис. 76**

Для определения контура собственной тени призмы необходимо установить освещенность ее граней. Так как боковые грани призмы перпендикулярны к плоскости  $H$ , то их освещенность легко определить на горизонтальной проекции, где видно, что обращены к свету две грани:  $EFGK$  и  $KGAB$ .

Освещено также верхнее основание призмы.

Таким образом, контуром собственной тени является ломаная  $ABCDEFGA$ , от которой построена тень, падающая на плоскости  $H$  и  $V$  по правилам, изложенным в предыдущей теме.

На рисунке 77,78 приведен пример построения собственной и падающей теней правильной пятиугольной пирамиды  $SABCDE$ .

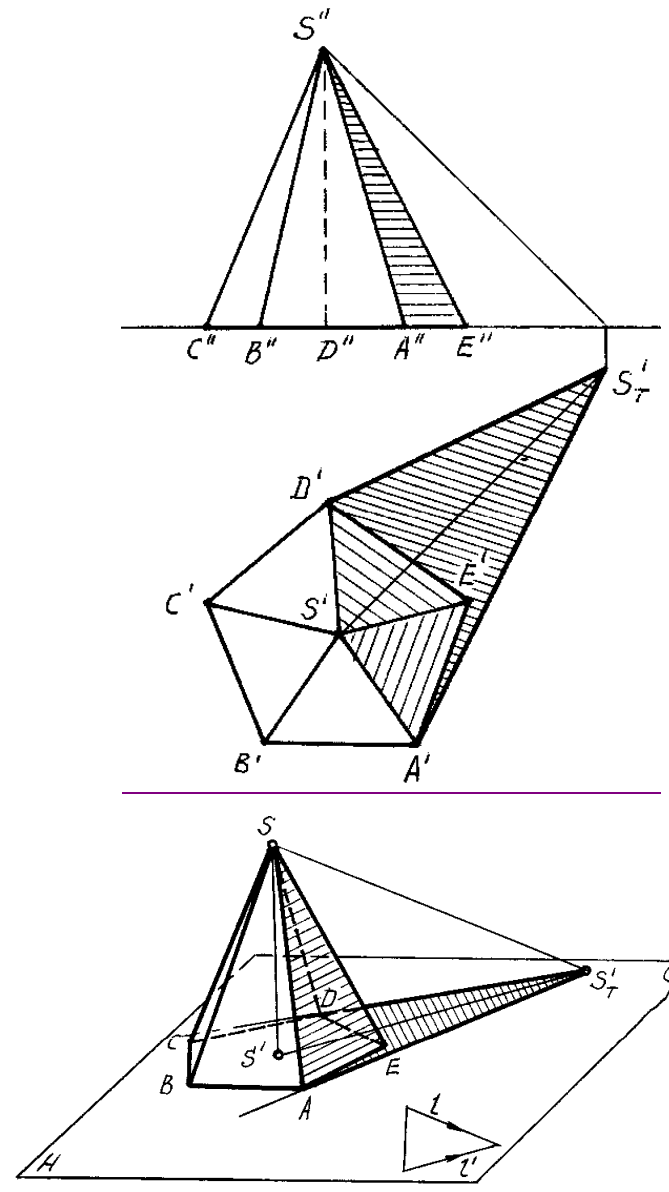


Рис. 77

Рис. 278

В отличие от прямой призмы, боковые грани пирамиды не являются горизонтально-проецирующими плоскостями, поэтому определить их освещенность непосредственно по горизонтальной проекции не всегда возможно.

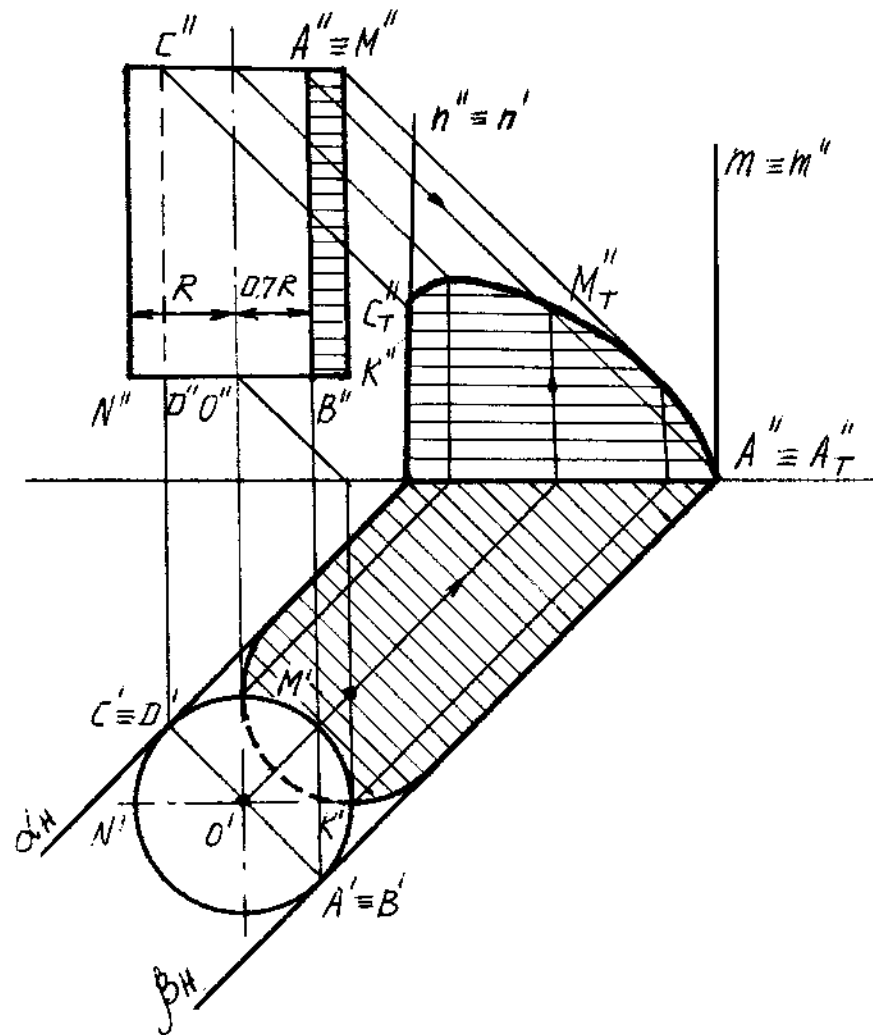
Строим падающую тень  $S_T'$  от вершины  $S$  на плоскость  $H$  и определяем падающие тени от боковых ребер пирамиды. Линиями контура падающей тени пирамиды оказались прямые  $S_T'A$  и  $S_T'D$ . Следовательно, контур собственной тени пройдет вдоль ребер  $SA$  и  $SD$ . Таким образом, в собственной тени будут находиться грани  $SAE$ ,  $SDE$  и основание пирамиды.

### Тени цилиндра

Чтобы построить контур собственной тени цилиндрической поверхности, необходимо провести к этой поверхности касательные лучевые плоскости, параллельные направлению лучей света, и найти линии касания (образующие цилиндра). Вдоль этих образующих пройдет контур собственной тени.

На рисунке 79 приведен пример построения собственной и падающей теней вертикально расположенного прямого кругового цилиндра. Контур собственной тени цилиндра проходит вдоль образующих  $AB$  и  $CD$  и замыкается сверху полуокружностью  $AMC$  верхнего основания, а снизу — полуокружностью  $BND$  нижнего основания.

Контур падающей тени от цилиндра состоит из падающих теней от образующих  $AB$  и  $CD$  и падающих теней от полуокружностей  $AMC$  и  $BND$ .



**Рис. 79**

Падающие тени от образующих  $AB$  и  $CD$  определяются с помощью следов  $\alpha_H, m, \beta_H$  и  $n$ , касательных лучевых плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Тени, падающие от полуокружностей  $AMC$  и  $BND$ , определяются как в примерах предыдущей темы.

Собственную тень на вертикальном круговом цилиндре в ортогональных проекциях можно построить, не имея горизонтальной проекции цилиндра, так как известно, что расстояние от фронтальных проекций образующих  $AB$  и  $CD$  до фронтальной проекции оси цилиндра равно радиусу цилиндра, умноженному на косинус  $45^\circ$ , то есть:

$$O'B' = O'D' = 0,707 O''K'' \quad (\text{рис. 79}).$$

Графическим путем проекции  $B''$  и  $D''$  точек  $B$  и  $D$  можно найти следующим образом (рис. 93): из точек  $O''$  и  $K''$  проводим под углом 45 градусов к отрезку  $O''K''$  прямые — катеты прямоугольного треугольника  $O''I K''$ . Из точки  $O''$  радиусом  $O''I$  проводим полуокружность, пересекающую прямую  $N''K''$  в искомым точках  $B''$  и  $D''$ .

### Тени конуса

На рис. 80,81 выполнены построения собственной и падающей теней конуса.

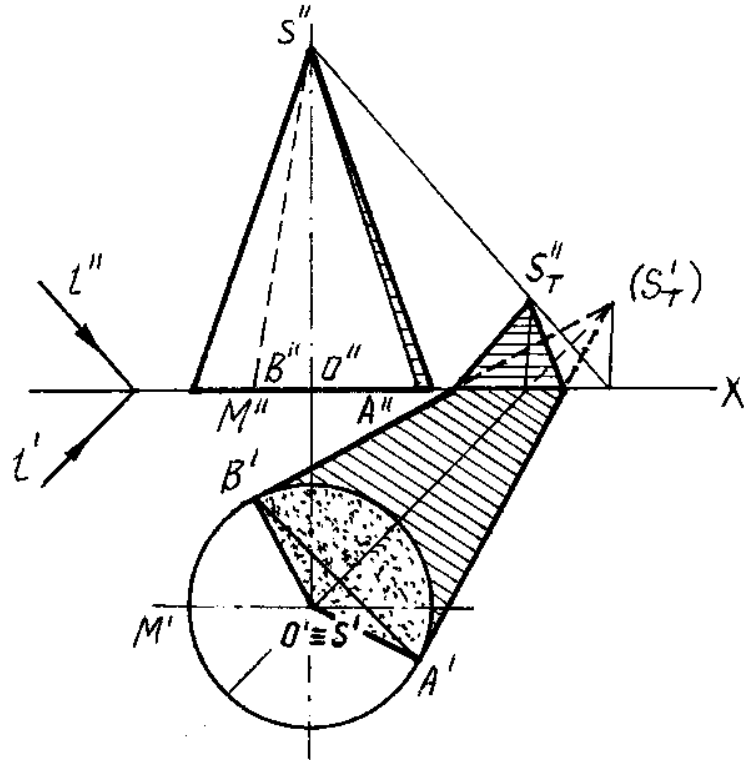


Рис. 80

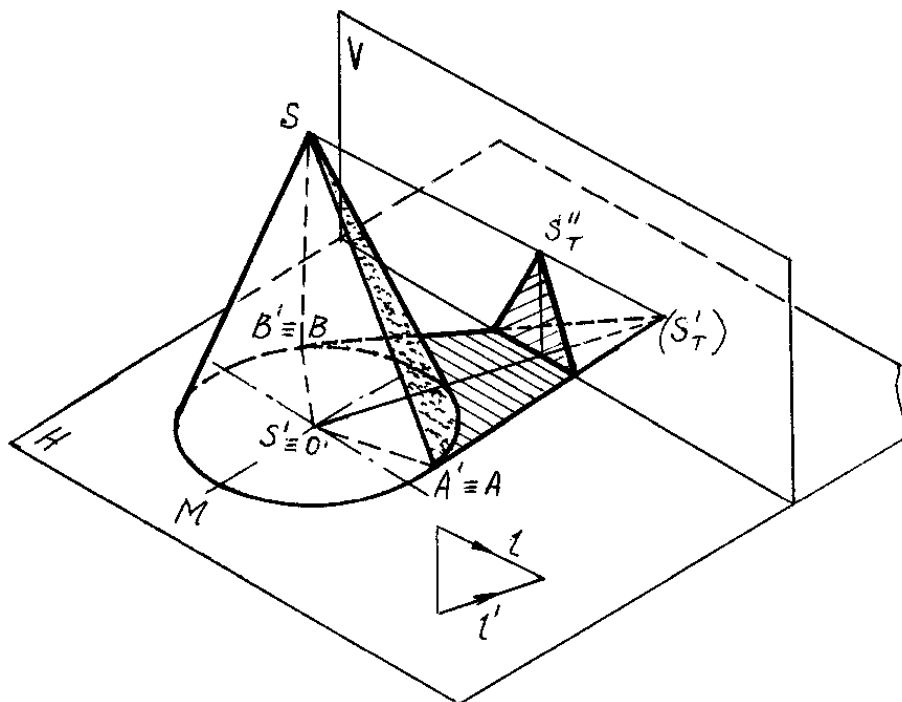


Рис. 81

Вначале определяется тень  $S_T'$  (мнимая), падающая от вершины  $S$  конуса на плоскость его основания  $H$ ; из полученной точки проводятся прямые, касательные к основанию конуса, и определяются точки касания  $A$  и  $B$ . Через эти точки проводятся образующие  $SA$  и  $SB$ , которые вместе с дугой основания  $AMB$  образуют контур собственной тени.

Касательные  $S_T'A'$  и  $S_T'B'$  к основанию на рис. 80, 81 являются линиями контура падающей тени конуса. Однако, это справедливо лишь в том случае, если конус стоит на плоскости, на которую падает тень. На рисунке падающая тень имеет точки изломов на оси  $OX$ .

#### 7.4. Тени геометрических тел

Выше говорилось, что тени делятся на собственные и падающие. Определение собственной тени сводится к нахождению ее контуров, то есть линий, отделяющих освещенную часть поверхности от неосвещенной.

Контур падающей тени можно рассматривать как тень, падающую от контура собственной тени.

#### Тени многогранников

На рисунке 89, 90 построены собственная и падающая тени прямой пятиугольной призмы.

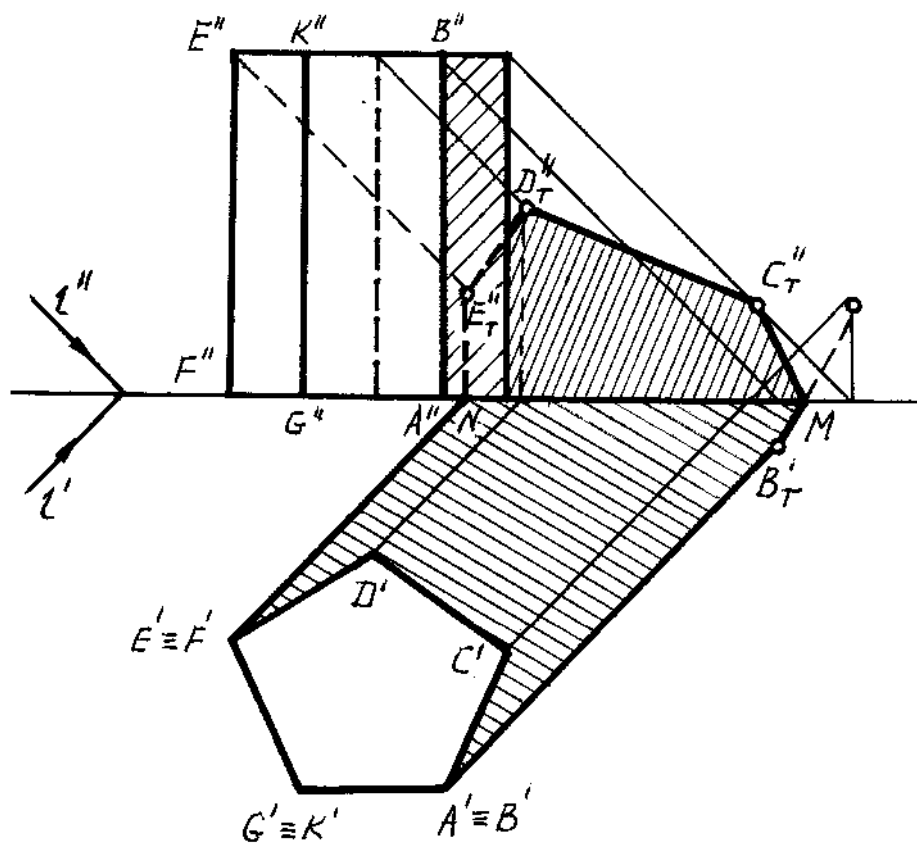
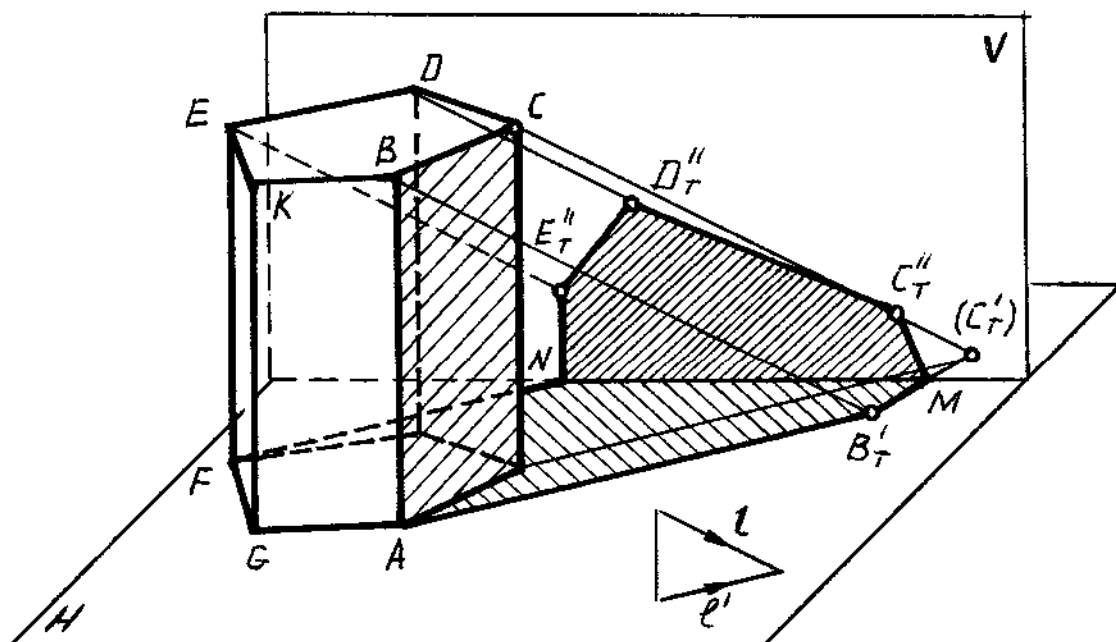


Рис. 89



**Рис. 90**

Для определения контура собственной тени призмы необходимо установить освещенность ее граней. Так как боковые грани призмы перпендикулярны к плоскости  $H$ , то их освещенность легко определить на горизонтальной проекции, где видно, что обращены к свету две грани:  $EFGK$  и  $KGAB$ .

Освещено также верхнее основание призмы.

Таким образом, контуром собственной тени является ломаная  $ABCDEFGA$ , от которой построена тень, падающая на плоскости  $H$  и  $V$  по правилам, изложенным в предыдущей теме.

На рисунке 91,92 приведен пример построения собственной и падающей теней правильной пятиугольной пирамиды  $SABCDE$ .

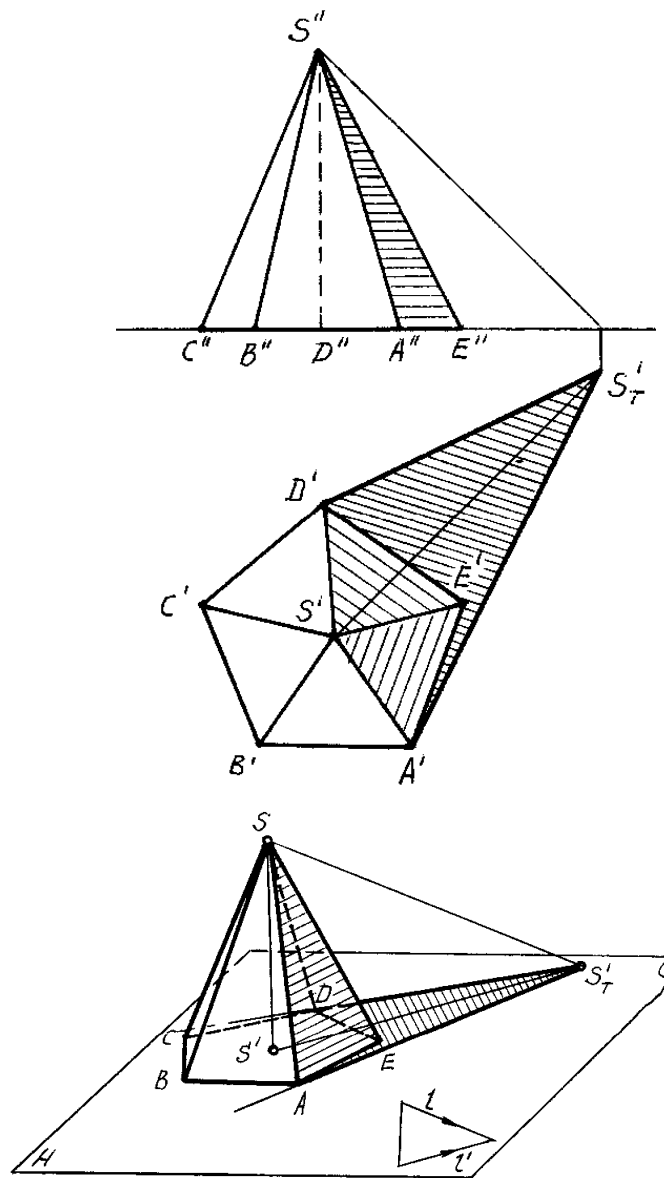


Рис. 91

Рис. 92

В отличие от прямой призмы, боковые грани пирамиды не являются горизонтально-проецирующими плоскостями, поэтому определить их освещенность непосредственно по горизонтальной проекции не всегда возможно.

Строим падающую тень  $S_T'$  от вершины  $S$  на плоскость  $H$  и определяем падающие тени от боковых ребер пирамиды. Линиями контура падающей тени пирамиды оказались прямые  $S_T'A$  и  $S_T'D$ . Следовательно, контур собственной тени пройдет вдоль ребер  $SA$  и  $SD$ . Таким образом, в собственной тени будут находиться грани  $SAE$ ,  $SDE$  и основание пирамиды.

### Тени цилиндра

Чтобы построить контур собственной тени цилиндрической поверхности, необходимо провести к этой поверхности касательные лучевые плоскости, параллельные направлению лучей света, и найти линии касания (образующие цилиндра). Вдоль этих образующих пройдет контур собственной тени.

На рисунке 93 приведен пример построения собственной и падающей теней вертикально расположенного прямого кругового цилиндра. Контур собственной тени



цилиндра проходит вдоль образующих  $AB$  и  $CD$  и замыкается сверху полуокружностью  $AMC$  верхнего основания, а снизу — полуокружностью  $BND$  нижнего основания.

Контур падающей тени от цилиндра состоит из падающих теней от образующих  $AB$  и  $CD$  и падающих теней от полуокружностей  $AMC$  и  $BND$ .

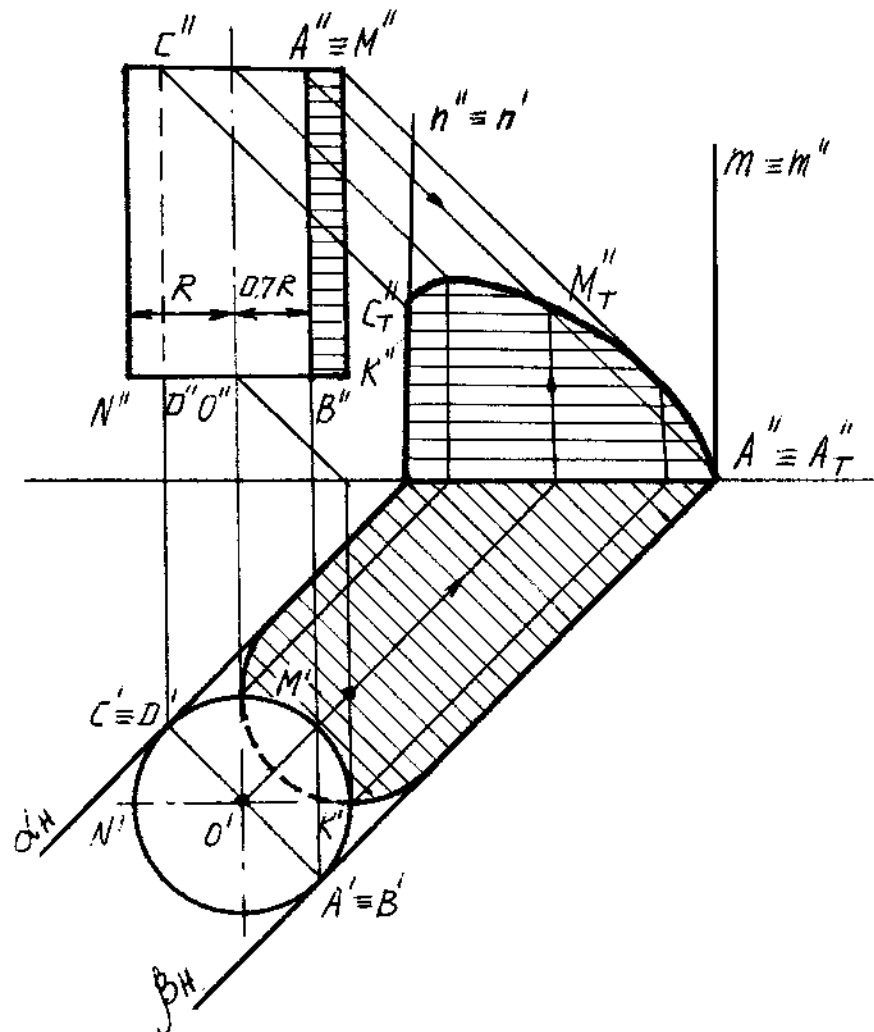


Рис. 93

Падающие тени от образующих  $AB$  и  $CD$  определяются с помощью следов  $\alpha_H, m, \beta_H$  и  $n$ , касательных лучевых плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Тени, падающие от полуокружностей  $AMC$  и  $BND$ , определяются как в примерах предыдущей темы (рис. 85).

Собственную тень на вертикальном круговом цилиндре в ортогональных проекциях можно построить, не имея горизонтальной проекции цилиндра, так как известно, что расстояние от фронтальных проекций образующих  $AB$  и  $CD$  до фронтальной проекции оси цилиндра равно радиусу цилиндра, умноженному на косинус  $45^\circ$ , то есть:

$$O'B' = O'D' = 0,707 O'K' \quad (\text{рис. 93}).$$

Графическим путем проекции  $B''$  и  $D''$  точек  $B$  и  $D$  можно найти следующим образом (рис. 93): из точек  $O''$  и  $K''$  проводим под углом  $45$  градусов к отрезку  $O''K''$  прямые — катеты прямоугольного треугольника  $O''1K''$ . Из точки  $O''$  радиусом  $O''1$  проводим полуокружность, пересекающую прямую  $N''K''$  в искомым точках  $B''$  и  $D''$ .

#### Тени конуса

На рис. 94, 95 выполнены построения собственной и падающей теней конуса.

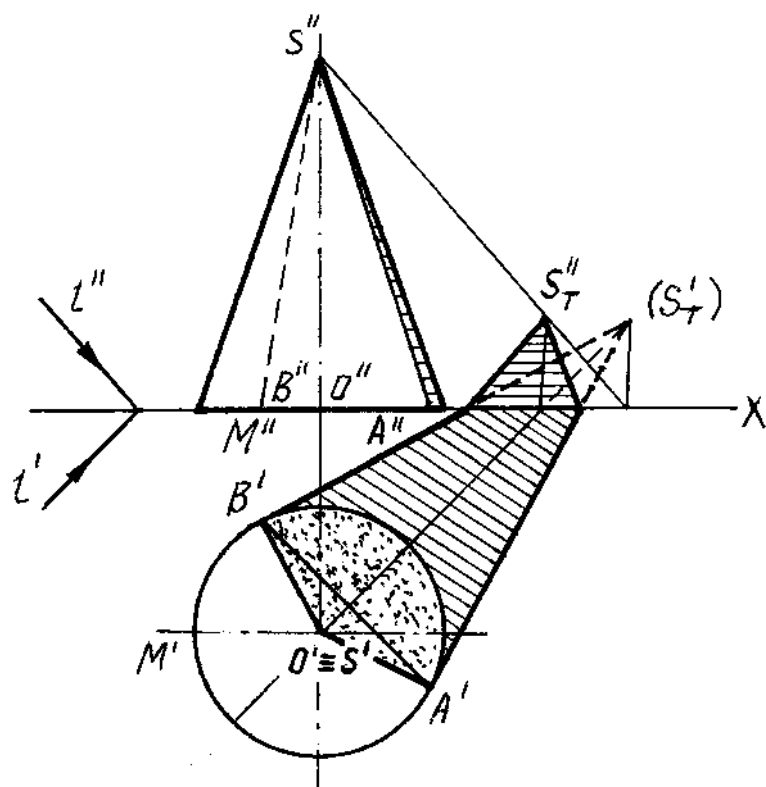


Рис. 94

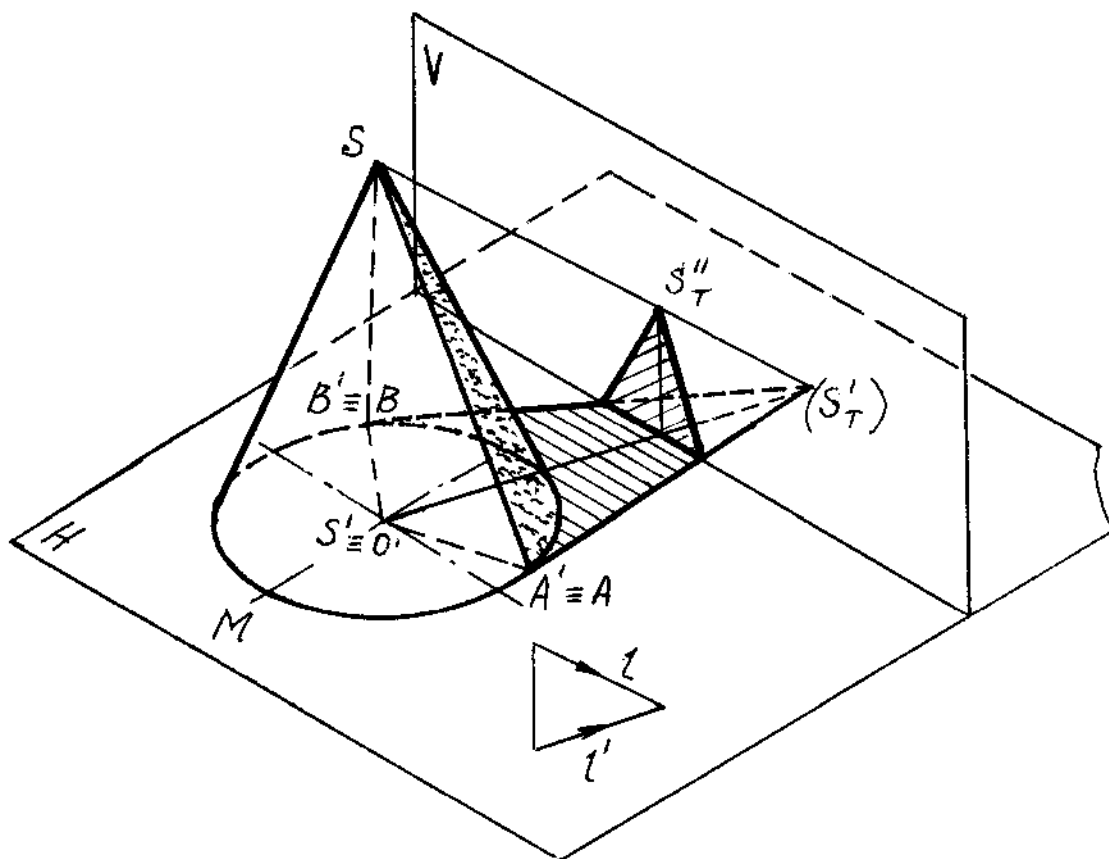


Рис. 95

Вначале определяется тень  $S_T'$  (мнимая), падающая от вершины  $S$  конуса на плоскость его основания  $H$ ; из полученной точки проводятся прямые, касательные к основанию конуса, и определяются точки касания  $A$  и  $B$ . Через эти точки проводятся

образующие  $SA$  и  $SB$ , которые вместе с дугой основания  $AMB$  образуют контур собственной тени.

Касательные  $S_T'A'$  и  $S_T'B'$  к основанию на рис. 94, 95 являются линиями контура падающей тени конуса. Однако, это справедливо лишь в том случае, если конус стоит на плоскости, на которую падает тень. На рисунке падающая тень имеет точки изломов на оси  $OX$ .

#### 1.1. 7.5. Тени пересекающихся многогранников (от здания)

При решении задач на построение теней пересекающихся многогранников не ограничиваются определением контуров собственных теней данных поверхностей и падающих теней от них на плоскости проекций. Задачи завершаются построением падающих теней от неосвещенных граней одного тела на пересекающиеся с ними освещенные грани второго. Каждая линия искомого контура будет представлять собой пересечение лучевой плоскости, проходящей через ребро неосвещенной грани одного многогранника, с освещенной гранью второго.

Таким образом, в основе всех построений будет решение задачи об определении тени от прямой на плоскости, где для ее решения используется метод обратных лучей.

На рис. 82,83 изображены два взаимно пересекающихся многогранника (в ортогональных проекциях и аксонометрии).

Прежде всего строим контуры их падающих теней на плоскость  $H$ , по которым определяем собственные тени. Затем нужно установить, имеют ли место случаи, когда неосвещенная грань одного тела пересекает освещенную грань другого.

При построении падающей тени от грани  $DCI'E'$  левой призмы на грань  $I'M'NF$  правой, воспользуемся обратными лучами, которые проведены через точки  $I'$  и  $II'$ .

Метод обратных лучей является весьма удобным, но не единственным при построении тени от многогранника на многогранник.

В некоторых случаях рационально использовать точки пересечения ребер с гранями, на которые падает тень от данного ребра. Эти точки не всегда могут быть в пределах контура грани.

На рисунке тень от ребра  $CD$  левой призмы на грань  $FNG'I'$  правой построена с помощью точек  $D_T$  и  $III$ . Точка  $D_T(D_T',D_T'')$  представляет собой падающую тень от вершины  $D$  на грань  $FNG'I'$ . Тень от ребра  $DE'$  на грань  $FNG'I'$  построена при помощи точек  $D_T(D_T',D_T'')$  и  $IV(IV,IV'')$ . Последняя построена в результате пересечения продолженных за пределы своих контуров граней  $DCI'E'$  и  $I'FNG'$ .

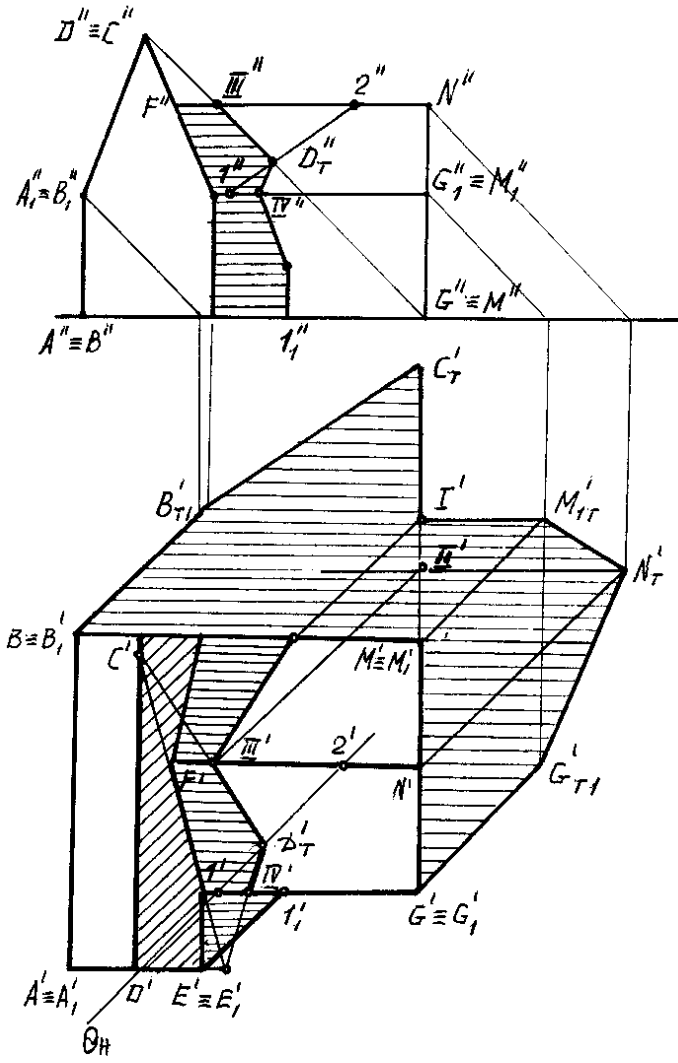


Рис. 82

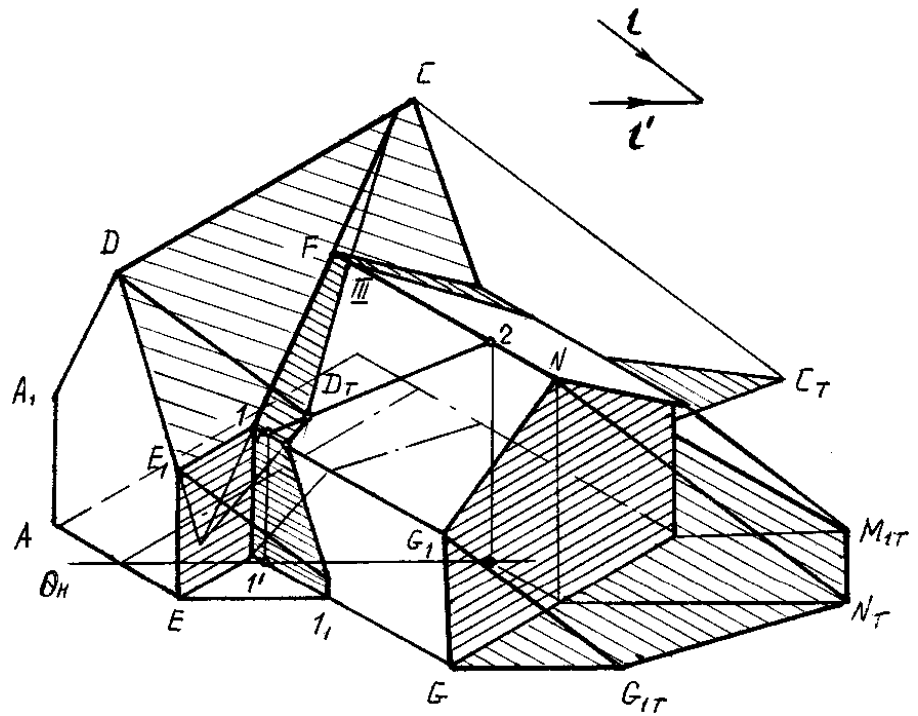


Рис. 83

Построение теней на фасадах зданий основано на определении точек пересечения световых лучей с вертикальными плоскостями фасада или с наклонными скатами крыши.

Определяя контур падающей тени, который является параллельной проекцией контура собственной тени, рекомендуется пользоваться следующими правилами.

1. Тень от плоской фигуры, падающая на параллельную ей плоскость, равна самой фигуре.
2. Тень отрезка прямой на параллельную ему плоскость равна и параллельна самому отрезку.
3. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то тень прямой на этой плоскости совпадает с направлением проекции луча.

### Построение теней в нишах

**ПРИМЕР 1.** На рис. 84,85 в аксонометрии и в ортогональных проекциях изображена прямоугольная ниша, в которой необходимо построить собственные и падающие тени.

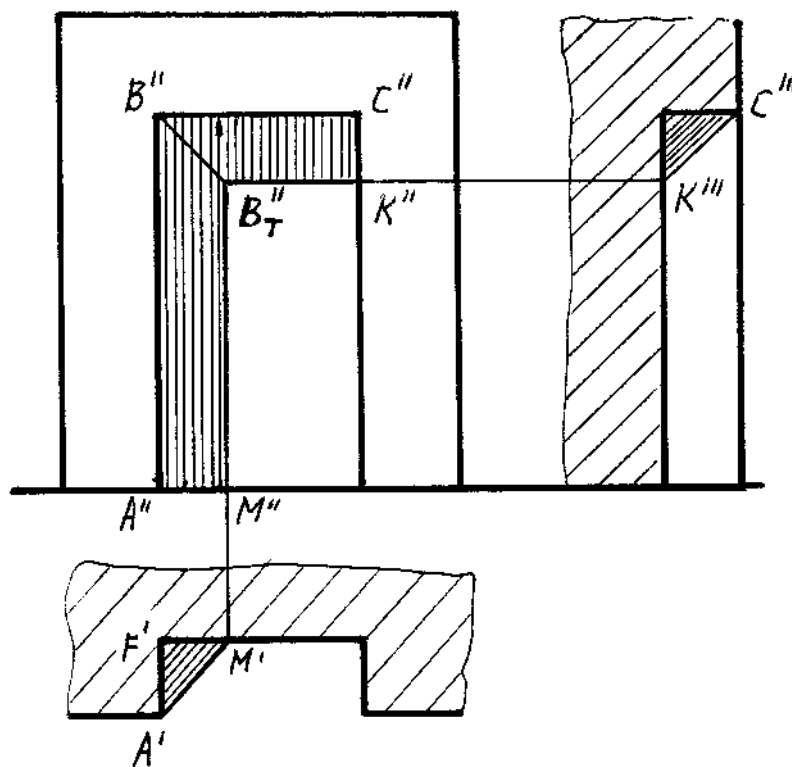


Рис.84

Расположение граней таково, что в собственной тени находятся левая боковая и верхняя грани, поэтому собственная тень ограничена ломаной линией  $ABCDEFA$ .

Так как отрезки  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FA$  являются внутренними ребрами ниши, то они входят одновременно и в контур падающей тени, то есть проходят по границе, отделяющей собственную тень от падающей. Строить падающую тень необходимо лишь от ребер  $AB$  и  $BC$ .

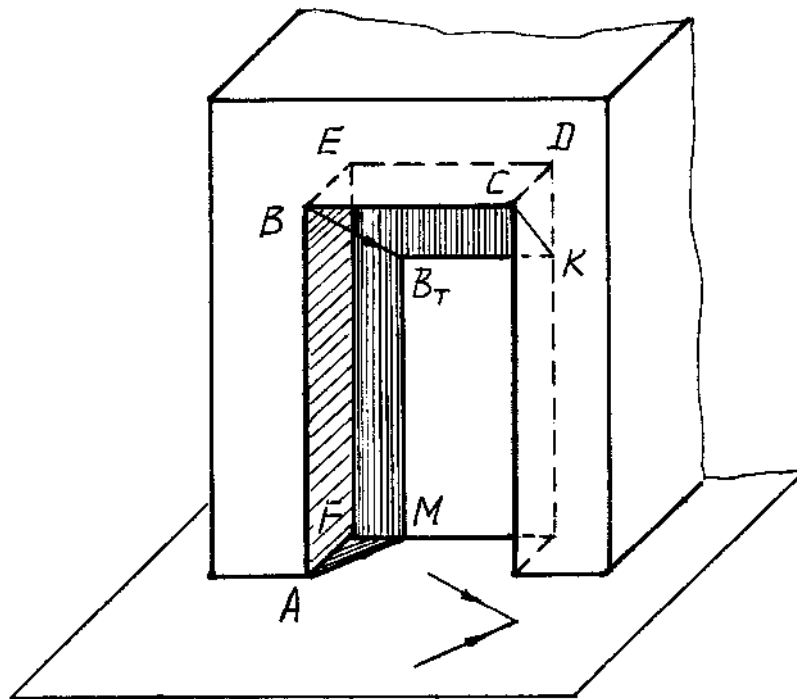


Рис. 85

ПРИМЕР 2. На рис. 86 дана ниша, перекрытая полуциркульной аркой.

Контуром собственной тени в этом примере является линия  $ABDEFKA$ , в состав которой входит образующая цилиндра  $DE$ . Последняя определяется как линия касания к цилиндрической поверхности арки касательной лучевой плоскостью  $\Theta$ , перпендикулярной к  $V$ .

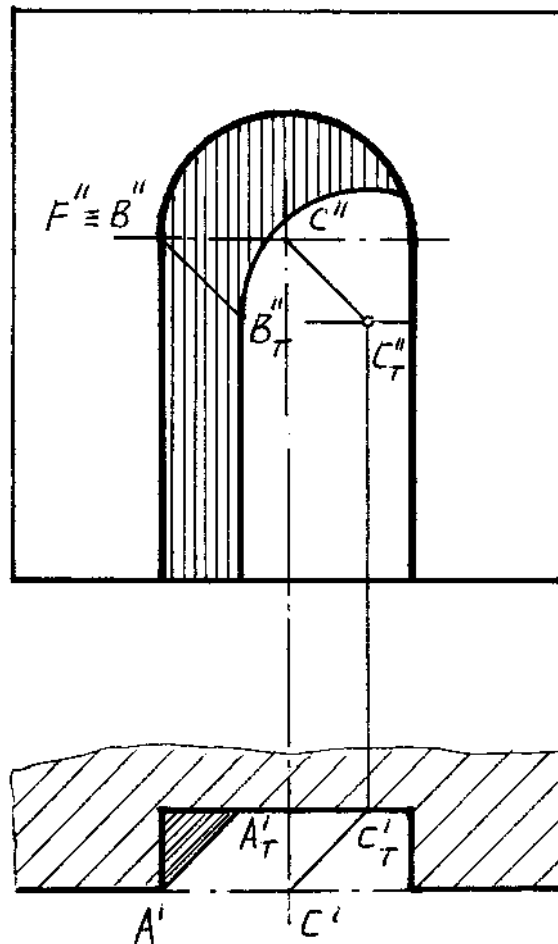


Рис.86

На участке  $DEFKA$  контур собственной тени одновременно является также контуром падающей тени.

Начинать построение падающей тени целесообразно с определения условной падающей тени  $C_T''$  от центра  $C$  полуокружности  $G$ . Из полученной точки  $C_T''$  описываем дугу окружности в пределах от точки  $B_T''$  до точки  $N_T''$ . В точке  $B_T''$  к этой дуге примыкает вертикальная тень  $B_T''A_T''$  ребра  $AB$ .

#### Тени от выступов

На рис. 87,88 изображена модель части стены здания с вертикальными выступающими углами  $AB$  и  $CD$  и с горизонтальным пояском.

Здесь в собственной тени находятся боковые грани, видимые в аксонометрии, и нижняя горизонтальная грань пояска.

Построение теней, падающих от вертикальных выступов  $AB$  и  $CD$  на фронтальные плоскости стены, а также тени, падающей на стену от прямолинейной фронтальной части пояска, не представляет трудностей.

Несколько сложнее форма падающей тени в месте огибания пояском выступа  $CD$ . Построение падающей тени в этом месте следует расчленить на две самостоятельные задачи.

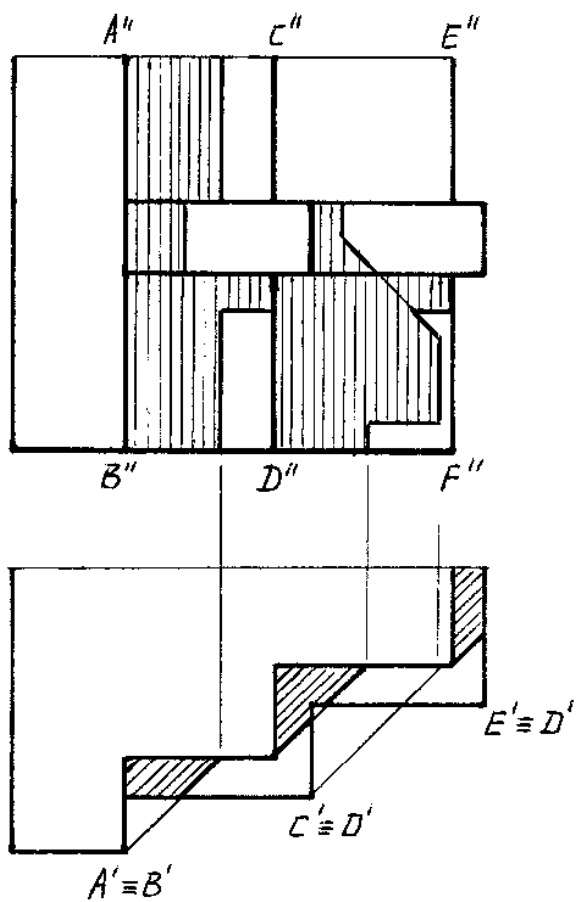


Рис. 87

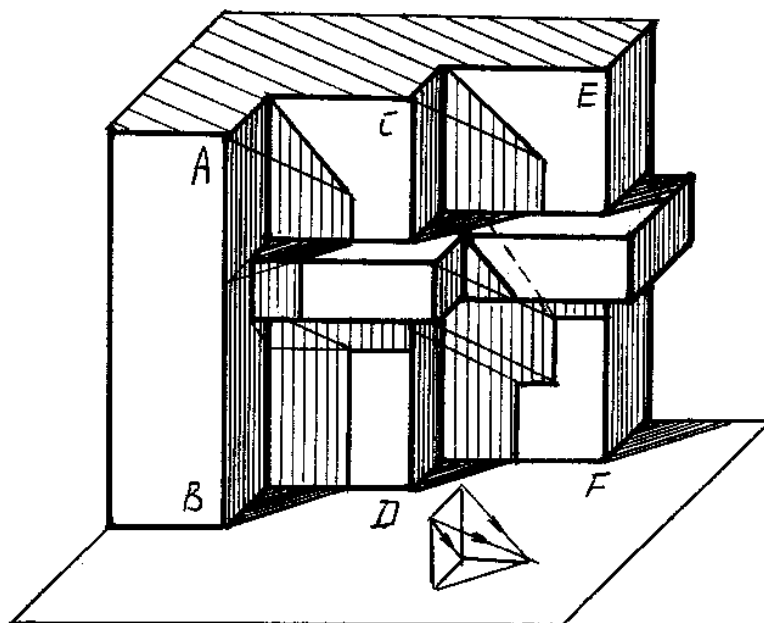


Рис. 88

1. Построение тени, падающей от вертикального ребра на стену здания и на поясок (здесь повторяются построения, выполняемые при определении тени, падающей от ребра АВ).

2. Построение тени, падающей на стену и поясок от выступа (излома) пояска.



## Лекция 14. Способы построения теней.

1. Тени архитектурных деталей и фрагментов.
2. Построение линий равной освещенности

Простейшая капитель содержит три элемента: квадратная плита (абака), эхин колонны (полувалик) и полуколонна. Капитель примыкает к фронтальной стене, проходящей через ось колонны (см. план на рис. 4.1). Требуется построить как собственные, так и падающие тени. Собственная тень валика построена способом касательных конусов и цилиндров (см. третью лекцию, рис. 3.4). Еще раз напомним, что точки  $1$  и  $3$  контура  $1-2-3-4$  собственной тени симметричны относительно лучевой плоскости  $\Sigma$ . План на рис. 4.1 показан только для наглядности (в построениях план не участвует).

После определения границ собственных теней приступаем к поиску падающих теней от абаки, от эхина и от колонны.

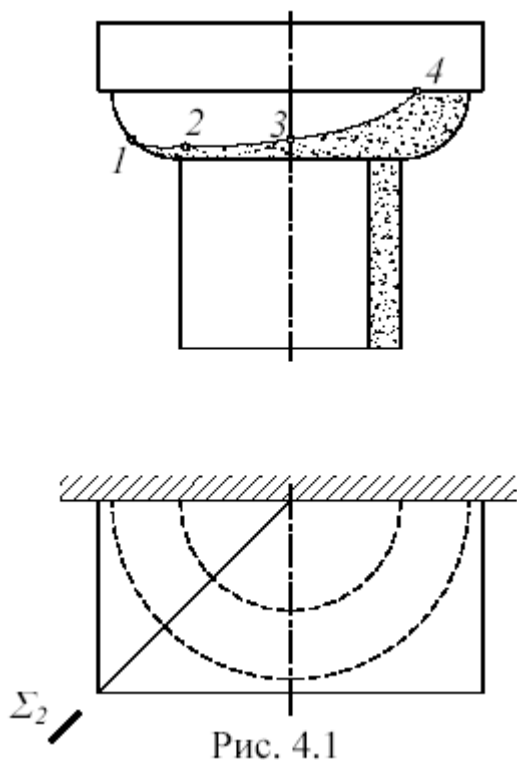


Рис. 4.1

### **Тень от абаки**

Абака (квадратная плита) отбрасывает тень на валик и на колонну. Плита почти полностью затеняет валик, оставляя лишь два одинаковых световых пятна, симметричных относительно плоскости  $\Sigma$  (рис. 4.2, *a*). “Левое” световое пятно образовано лучевой плоскостью, проходящей через нижнее боковое ребро плиты. Центральное световое пятно получается в пересечении валика с лучевой плоскостью, проходящей через нижнее переднее ребро плиты. На рис. 4.2, *a* показано построение трех точек центрального светового пятна. Верхняя точка центрального пятна симметрична верхней точке левого пятна. Промежуточные точки  $1_э$  и  $2_э$  найдены с помощью вспомогательного **экрана** (индекс “э” означает, что точка находится на эхине). Плоскость экрана пересекает валик по окружности радиуса  $R_э$ . Мысленно заменяем валик цилиндром с радиусом  $R_э$ . “Условная тень” от переднего ребра плиты на условном цилиндре повторяет нормальное

сечение цилиндра (см. лекцию 1, рис. 1.13), то есть выглядит окружностью (радиуса  $R_{\text{Э}}$ ) с центром ниже ребра на величину выноса  $y$ . Точки  $1_{\text{Э}}$  и  $2_{\text{Э}}$  получены на пересечении условной тени с плоскостью экрана.

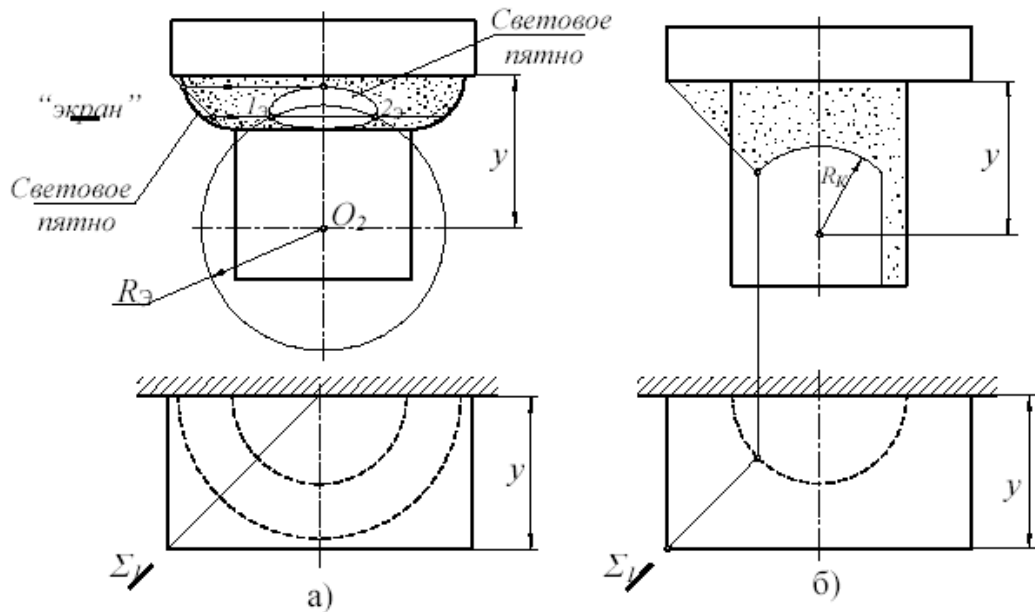


Рис. 4.2

Тень от плиты на фасаде колонны – участок окружности (рис. 4.2, б). Радиус  $R_{\text{К}}$  теневой окружности равен радиусу колонны (индекс “к” означает, что тень находится на колонне). Центр окружности ниже плиты на величину выноса  $y$ .

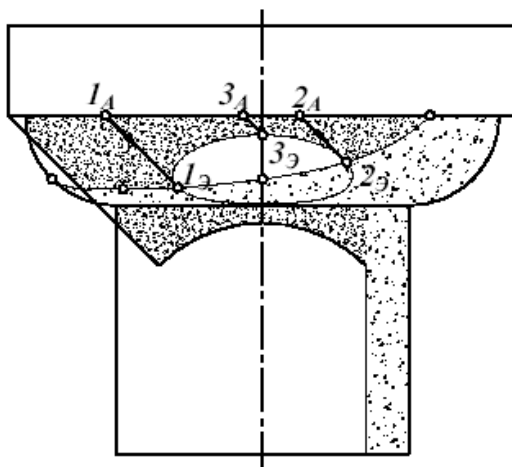


Рис. 4.3

Таким образом, построены собственные тени схематизированной капители (рис. 4.1) и тени, падающие от абаки на эхин и колонну (рис. 4.2). Все построения должны выполняться на одном чертеже (рис. 4.3).

**Внимание! Чертеж на рис. 4.3 – не закончен!** На нем не построена тень от валика, падающая на колонну. Не показаны также тени на фронтальной стене. На этом чертеже, кроме собственных теней, показана только тень, падающая от абаки на эхин и на ствол колонны. Но уже сейчас надо обратить особое внимание на то, что участок  $1_A-3_A-2_A$  горизонтального ребра абаки отбрасывает тень на валик (граница падающей тени – линия  $1_{\text{Э}}-3_{\text{Э}}-2_{\text{Э}}$ ). Тень от остальной части горизонтального ребра абаки попадает либо на ствол колонны, либо на фронтальную стену. Также надо отметить, что световые лучи  $1_A-1_{\text{Э}}$  и

$2_A-2_Э$  *касаются* границы светового пятна на валике. Иначе говоря, переднее световое пятно на валике заключено между двумя и 2-2. Еще раз отметим, что точки  $1$  и  $2$  найдены как точки пересечения собственной тени эхина и тени, падающей на эхин от переднего ребра абаки. В этих точках тень от абаки, падающая на эхин – *исчезает*. Поэтому их называют *точками исчезновения тени*. Точка исчезновения падающей тени – это точка пересечения границ собственной и падающей теней. световыми лучами  $1_A-1_Э$  и  $2_А-2_Э$

#### *Тень от эхина*

Тень от валика (эхина) падает на ствол колонны и на фронтальную стену. В точке  $3_K$  тень от валика перемещается с фронтальной стены на ствол колонны (рис. 4.4). Разумеется, для построения точки  $3_K$  необходимо начертить тень от валика на фронтальной стене (способом выноса). Тень от валика на колонне, начинаясь в точке  $3_K$ , проходит через точки  $4_K$ ,  $1_K$ ,  $5_K$  и  $6_K$ . Подробно рассмотрим, как построены эти точки.

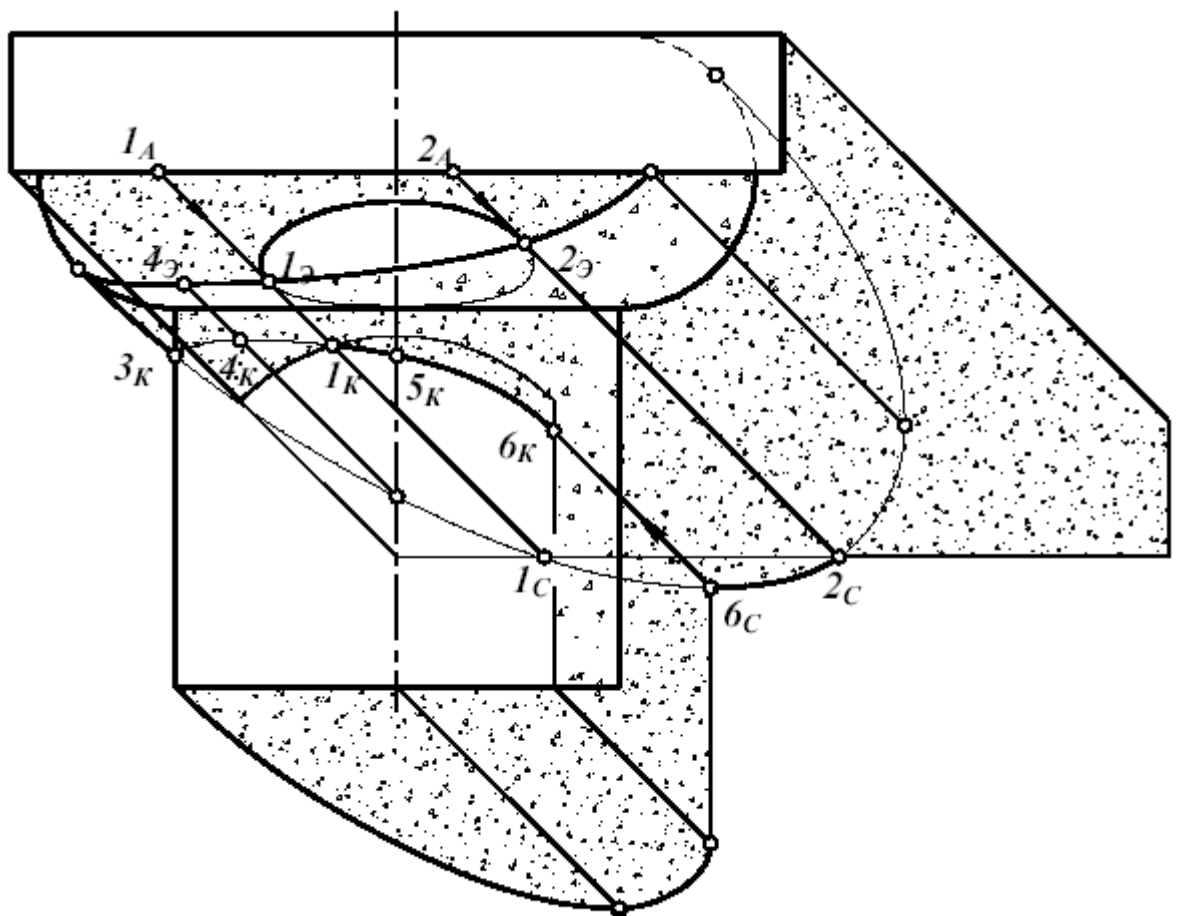


Рис. 4.4

Как найдена точка  $6_K$ ? Отмечаем на стене точку  $6_C$  пересечения теней, падающих от колонны и от валика, и проводим обратный луч (способ обратного луча).

Как найдена точка  $5_K$ ? Эта точка симметрична с точкой  $3_K$  относительно лучевой плоскости  $\Sigma$  (см. план на рис. 4.1), то есть находится посередине фасада, на одной параллели с точкой  $3_K$ .

Точка  $1_K$  – точка пересечения падающих на колонну теней от плиты и от валика. Она находится на одном луче с точками  $1_A$ ,  $1_Э$  и  $1_C$ .

Построение точки  $4_K$  следует рассмотреть особо. Напомним, что самая низшая точка  $4_Э$  собственной тени валика построена с помощью обратного конуса с углом наклона образующих  $35,3^\circ$ , который касается валика по параллели  $p$  (рис. 4.5). Этот же конус пересекает колонну по окружности, лежащей в плоскости  $\Omega$ . Единственная освещенная образующая  $S-4_Э$  конуса пересекается с окружностью  $\Omega$  в искомой точке  $4_K$ . Иначе говоря, световой луч  $S-4_Э$  касается валика в точке  $4_Э$  и падает в точку  $4_K$  на стволе колонны. На фасаде этот световой луч наклонен под углом  $45^\circ$  (см. лекцию 2, рис. 2.6, б).

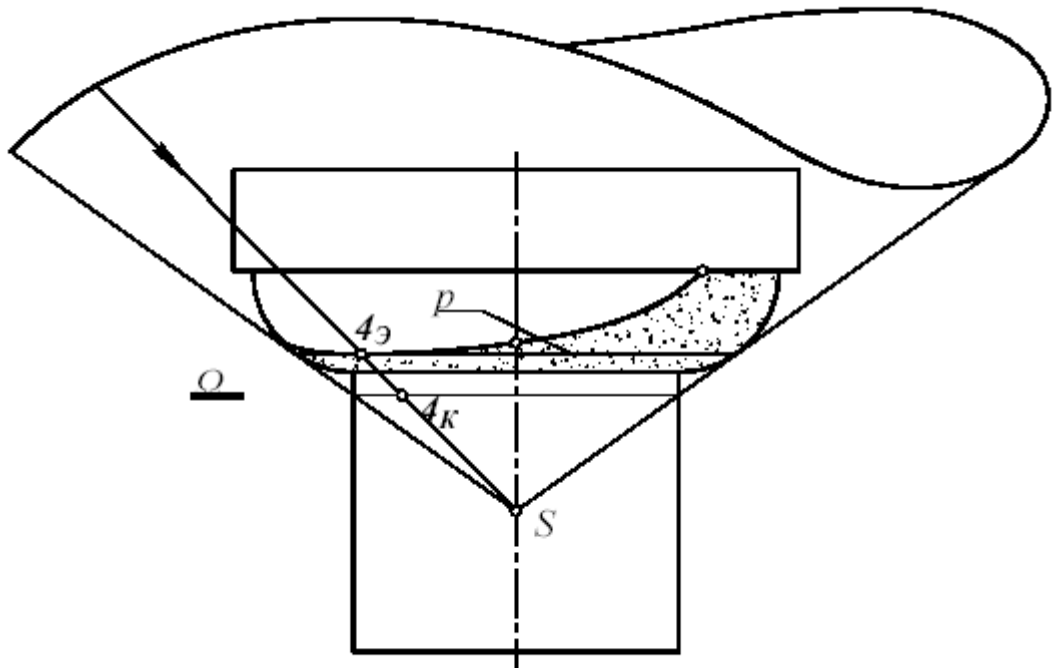


Рис. 4.5

Еще раз проанализируем соотношение собственных и падающих теней на фасаде капители (рис. 4.4). Переднее ребро абаки можно условно поделить на три участка. Тень на колонне от левого участка ребра (до точки  $1_A$ ) выглядит дугой окружности (до точки  $1_K$ ). Средний участок ребра от точки  $1_A$  до точки  $2_A$  отбрасывает тень на валик (верхняя граница светового пятна от точки  $1_Э$  до точки  $2_Э$ ). Правый участок ребра (от точки  $2_A$ ) отбрасывает тень на стену.

Валик (эхин колонны) почти полностью затенен. Тем не менее, на валике есть два световых пятна (левое и центральное). Нижняя часть центрального светового пятна от точки  $1_Э$  до точки  $2_Э$  – это граница собственной тени валика. Мы знаем, что падающая тень – тень от границы собственной тени. Поэтому участок  $1_Э-2_Э$  порождает падающую тень (частично на колонну, частично – на стену). Тень от точки  $1_Э$  попадает в точку  $1_K$ . Напомним, что  $1_K$  – точка пересечения падающих на колонну теней от плиты и от валика. Она должна находиться на одном луче с точками  $1_A$ ,  $1_Э$  и  $1_C$ .

Тень от точки  $2_Э$  попадает на фронтальную стену (в точку  $2_C$  пересечения теней от плиты и валика). В точке  $2_C$  тень от валика *исчезает*, пропадая в тени, падающей от колонны.

Таким образом, на фасаде схематизированной капители (рис. 4.4) можно выделить три группы “проверочных” точек.

1. Точки  $1_{Э}$ ,  $1_{К}$ ,  $1_{С}$  должны находиться на одном световом луче.

2. Точки  $6_{К}$  и  $6_{С}$  – на одном световом луче.

3. Точки  $2_{Э}$  и  $2_{С}$  – на одном световом луче.

И последняя проверка – *световые лучи  $1_{А-1_{Э}}$  и  $2_{А-2_{Э}}$  должны касаться границы светового пятна на валике, ни в коем случае его не пересекая.*

В заключение заметим, что в учебнике начертательной геометрии Ю.И. Короева на рис. 234 (тени схематизированной капители) имеется неточность (какая?).

### Тень скоции

Скоция – тело вращения. И верхняя плита, и основание скоции имеют цилиндрическую форму. В примере, показанном на рис. 4.6, скоция примыкает к фронтальной стене (подобно капители, показанной на рис. 4.1, но верхняя плита – круглая, а не квадратная). Собственную и падающую тени строят без плана, пользуясь способом вспомогательных конусов, способом выноса и способом обратного луча.

Для построения *собственной тени* строим два обратных конуса с углами  $45^\circ$  и  $35,3^\circ$ , которые касаются вогнутой поверхности скоции по двум параллелям  $p_{45}$  и  $p_{35}$ . На параллели  $p_{45}$  отмечаем две точки: одна на очерке, другая – по центру скоции. Верхняя точка 7 собственной тени находится на параллели  $p_{35}$ . Для поиска этой точки надо провести обратный луч под углом  $45^\circ$  из вершины конуса  $35,3^\circ$  до пересечения с линией касания  $p_{35}$ .

*Падающие тени* на стене строим способом выноса, определяя вынос любой точки с помощью вспомогательных окружностей, начерченных прямо на фасаде (“наложенный план”). В точке 1 тень от верхнего полуцилиндра перемещается со стены на скоцию. В точке 3 тень, падающая на скоцию, “исчезает”. Эта точка найдена обратным лучом, идущим из точки 8 пересечения падающих теней.

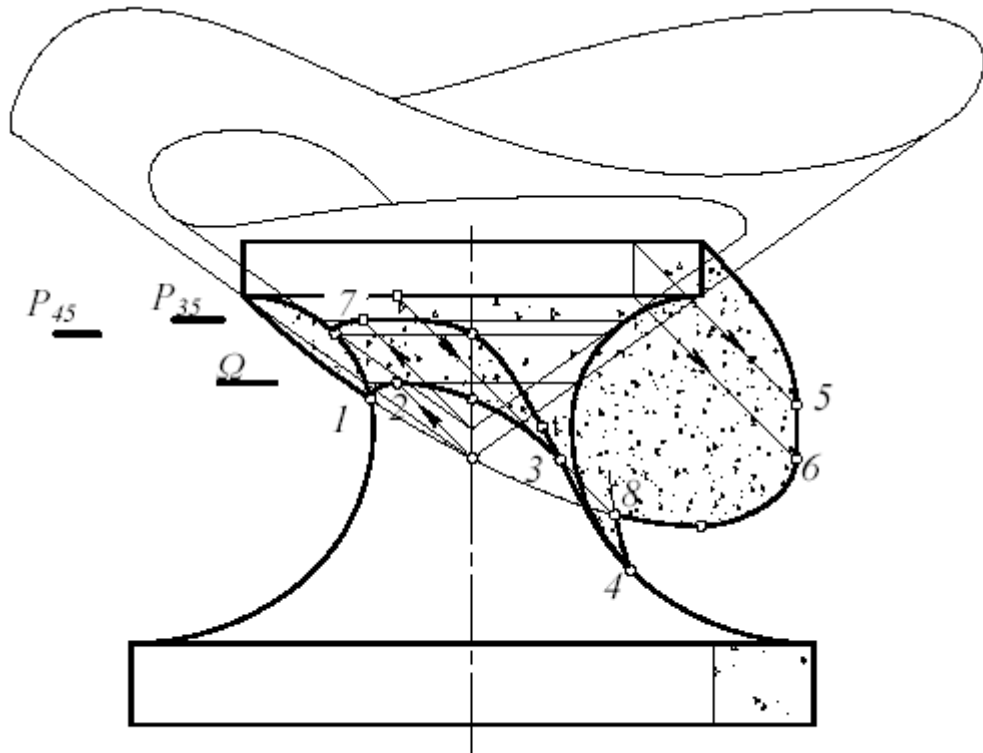


Рис. 4.6

**Самая нижняя точка** тени, падающей на фасадную стену (точка 4) найдена с помощью прямого конуса с углом  $45^\circ$ .

Подробнее рассмотрим построение **самой верхней точки** тени, падающей от верхней цилиндрической плиты на вогнутую поверхность (точка 2 на рис. 4.6). Используем вспомогательный конус  $35,3^\circ$ , который касается нижней круговой кромки цилиндра и пересекает скоцию по окружности  $\Omega$ . На этом конусе есть единственная “освещенная” образующая (по ней скользит световой луч). Точка 2 найдена на пересечении освещенной образующей с параллелью  $\Omega$ . Этот прием уже был использован ранее при построении верхней теневой точки на колонне капители.

На скоции всего **две проверочные точки**: точка 3 (пересечение собственной и падающей теней на скоции) и точка 8 (пересечение падающих теней на стене). Эти точки должны находиться на одном световом луче.

В заключение заметим, что способы, использованные при построении теней на капители и скоции, потребуются при выполнении контрольно-графического задания “Тени на полубалясине”.

### Тень карниза

Угловые профили карниза или пилястры расположены в вертикальных плоскостях под углом  $45^\circ$  к фронтальной стене. Поэтому при построении теней можно пользоваться как левым, так и правым угловым профилем. Если известен вынос карниза  $y$ , то тени определяются без плана (план на рис. 4.7 показан только для справки).

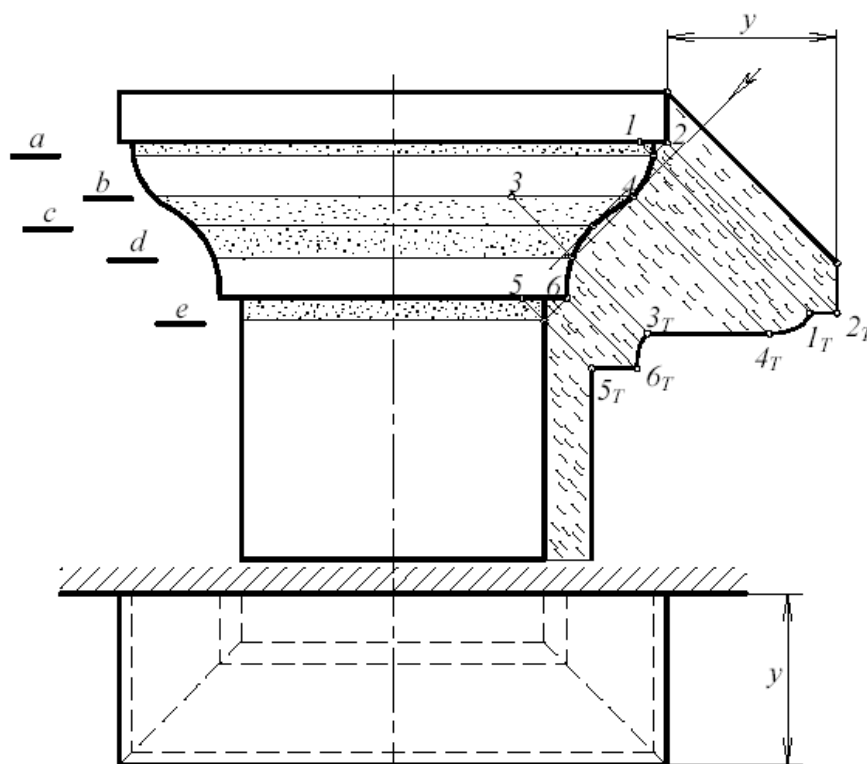


Рис. 4.7

Границу  $a$  тени, падающей от верхней плиты, можно найти с помощью левого профиля, проводя проекцию светового луча обычным образом (слева направо). Но если левый угловой профиль карниза недоступен, то можно использовать правый профиль,

проводя проекции световых лучей в направлении, симметричном основному, то есть справа налево.

Сказанное справедливо и для границ  $b$  и  $c$  собственной тени. Для их построения надо провести проекции лучей касательно к профилю карниза (левого или правого).

Падающая тень  $d$  – это тень от границы  $b$  собственной тени (определяется с помощью правого углового профиля).

Тень от карниза, падающая на стену, определяется **способом выноса** с применением **обратных лучей**. Например, тень от границы  $b$  собственной тени частично попадает на карниз, а начиная от точки  $3$  и до точки  $4$  – на стену. Тень  $3_T-4_T$  на стене – это тень от участка  $3-4$ . Точка  $3$  найдена с помощью обратного луча, а тень  $4_T$  на стене – по выносу точки  $4$ .

### Тень кронштейна

В этой задаче роль плана выполняет профильная проекция кронштейна (рис. 4.8). **Собственные тени** определяем с помощью лучей, касательных к профилю кронштейна. Граница собственных теней – криволинейные кромки  $2-3$ ,  $6-7$ , прямая кромка  $3-5$  и линия  $7-8$ .

Граница собственной тени верхней плиты – ее боковая и передняя горизонтальные кромки. **Падающая тень** от плиты частично попадает на стену, частично – на кронштейн. Световой луч, проходящий через точку  $1$ , “задевает” кронштейн в точке  $1_K$  и падает на стену в точку  $1_C$  (индекс “ $k$ ” означает кронштейн, индекс “ $c$ ” – стена). Тень от участка собственной тени  $2-3-4$  попадает на кронштейн (падающая тень  $2-3_K-4_K$ ), от участка  $4-5$  – на стену (тень  $4_C-5_C$ ). Тень от участка собственной тени  $6-7-8$  полностью попадает на стену.

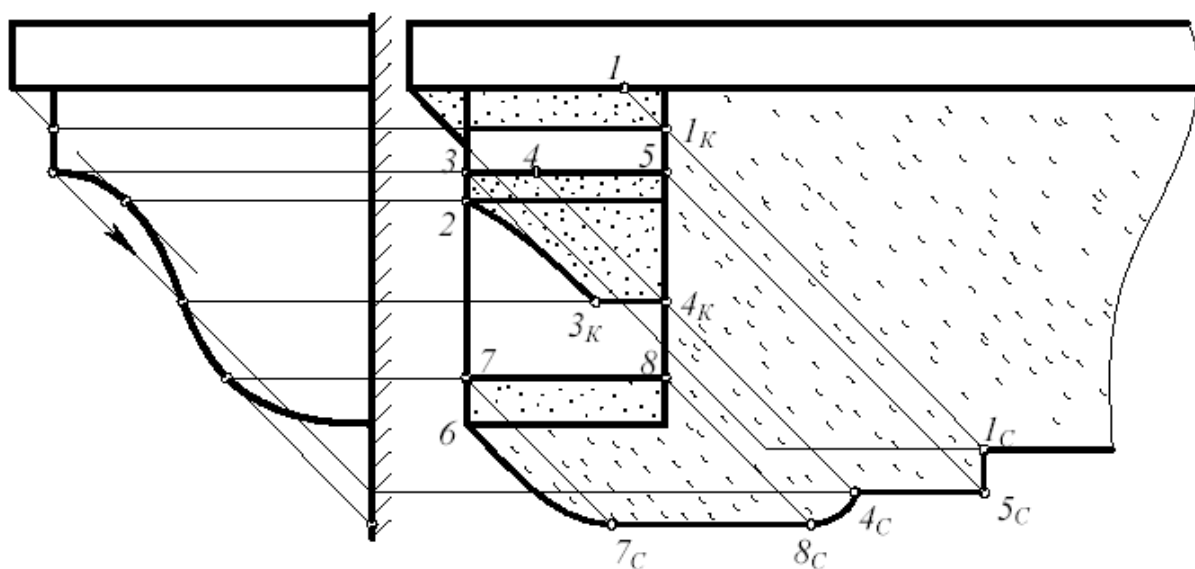


Рис. 4.8

### Тень в полусферической нише

Собственная тень в полусферической нише строится так же, как и на сфере (см. лекцию 2, рис. 2.8, рис. 2.9). Разумеется, собственные тени на сфере и в сферическом углублении “меняются местами”: освещенная часть сферы – это собственная тень в сферической нише, и наоборот.

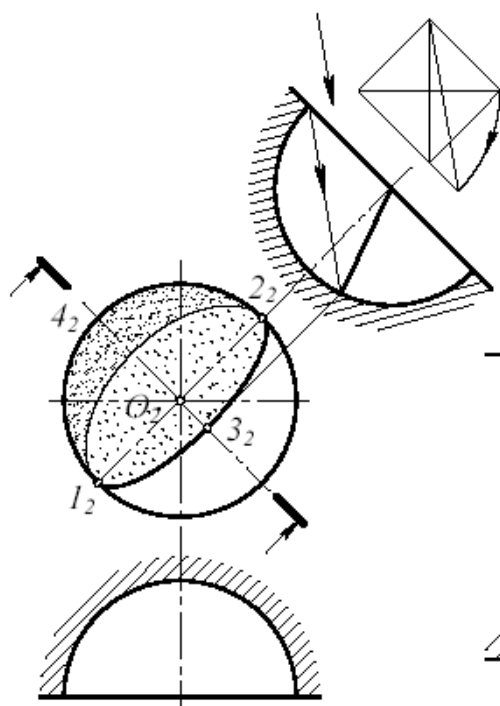


Рис. 4.9

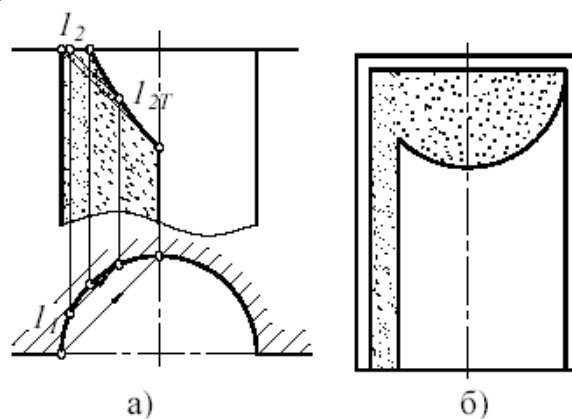


Рис. 4.10

Падающая тень  $1_2-2_2-3_2$  на фасаде сферической ниши – *это эллипс, малая полуось  $O_2-3_2$  которого равна одной трети от радиуса сферы* (рис. 4.9). Построение точки 3 показано на дополнительной плоскости проекций, размещенной параллельно световому потоку. На рис. 4.9 эта плоскость обозначена двумя утолщенными отрезками, а направление взгляда – стрелками. Покажем, что тень  $1_2-2_2-3_2$ , падающая от освещенной кромки  $1_2-4_2-2_2$  на внутреннюю поверхность сферической ниши – действительно часть эллипса. Световые лучи, проходя через дугу окружности  $1-4-2$ , образуют эллиптический цилиндр, который касается сферы в точках 1 и 2. Поэтому линия пересечения лучевого цилиндра и сферы (*согласно теореме о двойном прикосновении тел второго порядка*) распадается на две окружности, одна из которых (линия  $1-3-2$ ) является границей падающей тени. На дополнительной плоскости проекций эта окружность вырождается в отрезок прямой, а на фасаде проецируется эллипсом.

#### Тень в цилиндрической нише

Тень в *открытой* цилиндрической нише (рис. 4.10, а) найдена с использованием плана. Показано построение промежуточной теневой точки (точка  $I_T$ ).

На рис. 4.10, б показана *перекрытая сверху* цилиндрическая ниша. Тень на внутренней поверхности ниши от горизонтального козырька повторяет нормальное сечение поверхности – окружность с радиусом, равным радиусу цилиндрической ниши (см. лекцию 1, рис. 1.13). Падающая тень (часть окружности) строится без использования плана.

#### Тень фронтальной каннелюры

Каннелюра – цилиндрическая ниша в стене (на колонне), которая сверху и снизу завершается полусферическими углублениями. На рис. 4.11, а показано построение границы  $ABCD$  собственной тени. Участки  $AB$  и  $CD$  – дуги эллипса, построенного “*по восьми точкам*” (см. лекцию 2, рис. 2.9). Участок  $BC$  – собственная тень цилиндрической ниши.



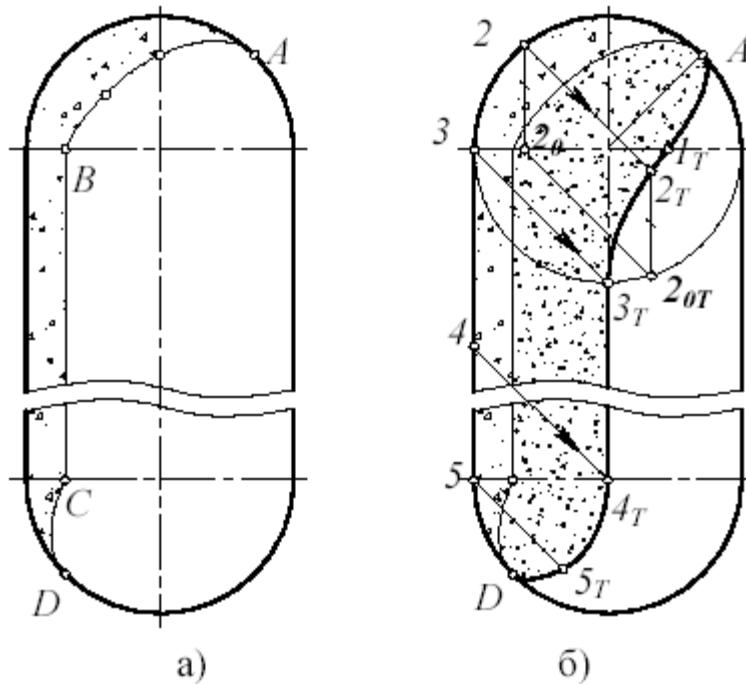


Рис. 4.11

На рис. 4.11, б дано построение падающей тени от освещенной кромки  $A-2-3-4-5-D$ .

Участки  $A-1_T$  и  $D-5_T$  – это тень на внутренней поверхности сферической ниши (согласно рис. 4.7 это дуги эллипса, малая ось которого равна одной трети радиуса сферы).

Участок  $3_T-4_T$  – тень на цилиндрическом участке от прямолинейной кромки  $3-4$ .

Участок  $4_T-5_T$  – тень от прямолинейного участка  $4-5$ , падающая на полусферическую нишу. Его построение мы рассматривать не будем. Достаточно соединить найденные точки  $4_T$  и  $5_T$  плавной кривой (без изломов в этих точках).

Немного подробнее рассмотрим участок падающей тени от точки  $1_T$  до точки  $3_T$ . На рис. 4.11, б показано построение одной из точек этого участка (точки  $2_T$ ). Тень в точку  $2_T$  попадает от точки 2, “сидящей” на кромке сферической ниши. Мысленно опустим точку 2 вниз (в положение  $2_o$ ). Тень  $2_{oT}$  от точки  $2_o$  будет найдена на дуге окружности (см. построение тени в перекрытой нише, рис. 4.10). Осталось поднять “виртуальную” теневую точку  $2_{oT}$  вверх на расстояние  $2-2_o$ .

## Лекция 15. Аксонометрические проекции.

1. Прямоугольная изометрия
2. Прямоугольная диметрия.
3. Построение аксонометрических изображений.

### Аксонометрические проекции

Для наглядного изображения предметов (изделий или их составных частей) рекомендуется применять аксонометрические проекции, выбирая в каждом отдельном случае наиболее подходящую из них.

Сущность метода аксонометрического проецирования заключается в том, что заданный предмет вместе с координатной системой, к которой он отнесен в пространстве,

параллельным пучком лучей проецируется на некоторую плоскость. Направление проецирования на аксонометрическую плоскость не совпадает ни с одной из координатных осей и не параллельно ни одной из координатных плоскостей.

Все виды аксонометрических проекций характеризуются двумя параметрами: направлением аксонометрических осей и коэффициентами искажения по этим осям. Под коэффициентом искажения понимается отношение величины изображения в аксонометрической проекции к величине изображения в ортогональной проекции.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции подразделяются на:

- изометрические, когда все три коэффициента искажения одинаковы ( $k_x=k_y=k_z$ );
- диметрические, когда коэффициенты искажения одинаковы по двум осям, а третий не равен им ( $k_x=k_z \neq k_y$ );
- триметрические, когда все три коэффициенты искажения не равны между собой ( $k_x \neq k_y \neq k_z$ ).

В зависимости от направления проецирующих лучей аксонометрические проекции подразделяются на прямоугольные и косоугольные. Если проецирующие лучи перпендикулярны аксонометрической плоскости проекций, то такая проекция называется прямоугольной. К прямоугольным аксонометрическим проекциям относятся изометрическая и диметрическая. Если проецирующие лучи направлены под углом к аксонометрической плоскости проекций, то такая проекция называется косоугольной. К косоугольным аксонометрическим проекциям относятся фронтальная изометрическая, горизонтальная изометрическая и фронтальная диметрическая проекции.

### 1. Прямоугольная изометрия

В прямоугольной изометрии углы между осями равны  $120^\circ$ . Действительный коэффициент искажения по аксонометрическим осям равен 0,82, но на практике для удобства построения показатель принимают равным 1. Вследствие этого

аксонометрическое изображение получается увеличенным в  $\frac{1}{0,82} \approx 1,22$  раза.

Изометрические оси изображены на рисунке 89.

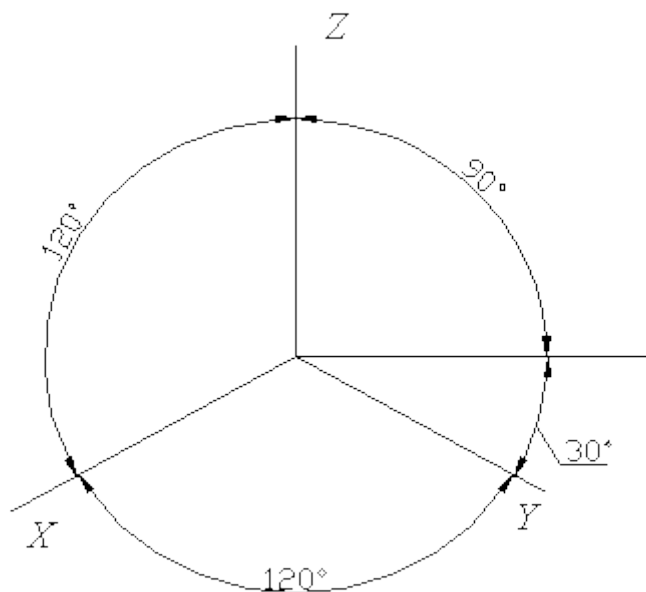


Рисунок 89

Построение изометрических осей можно выполнить при помощи циркуля (рисунок 90). Для этого сначала проводят горизонтальную линию и перпендикулярно к ней проводят ось  $Z$ . Из точки пересечения оси  $Z$  с горизонтальной линией (точка  $O$ ) проводят вспомогательную окружность произвольным радиусом, которая пересекает ось  $Z$  в точке  $A$ . Из точки  $A$  этим же радиусом проводят вторую окружность до пересечения с первой в точках  $B$  и  $C$ . Полученную точку  $B$  соединяют с точкой  $O$  - получают направление оси  $X$ . Таким же образом соединяют точку  $C$  с точкой  $O$  - получают направление оси  $Y$ .

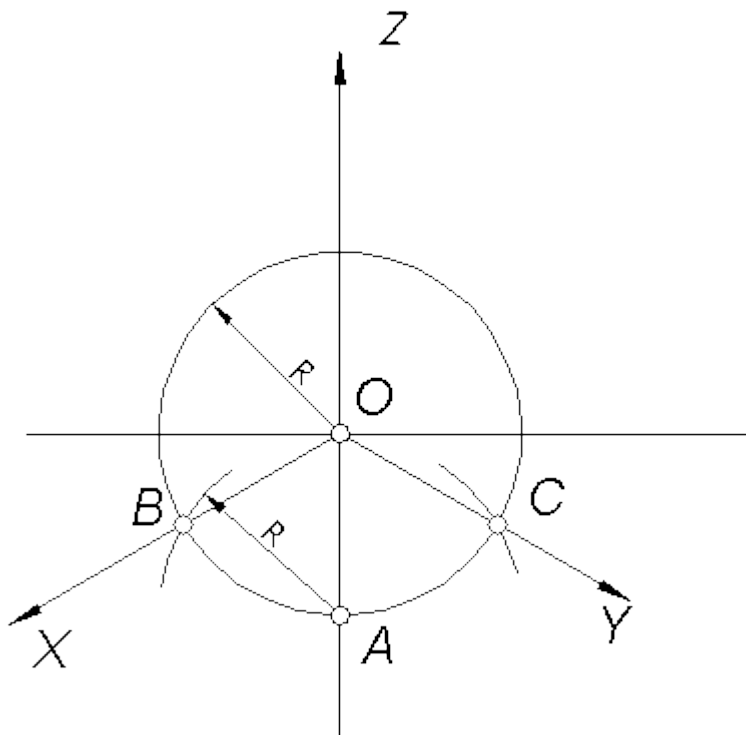


Рисунок 90

Построение изометрической проекции шестиугольника представлено на рисунке 91. Для этого необходимо отложить по оси  $X$  радиус описанной окружности шестиугольника в обе стороны относительно начала координат. Затем, по оси  $Y$  отложить величину размера под ключ, из полученных точек провести линии параллельно оси  $X$  и отложить по ним величину стороны шестиугольника.

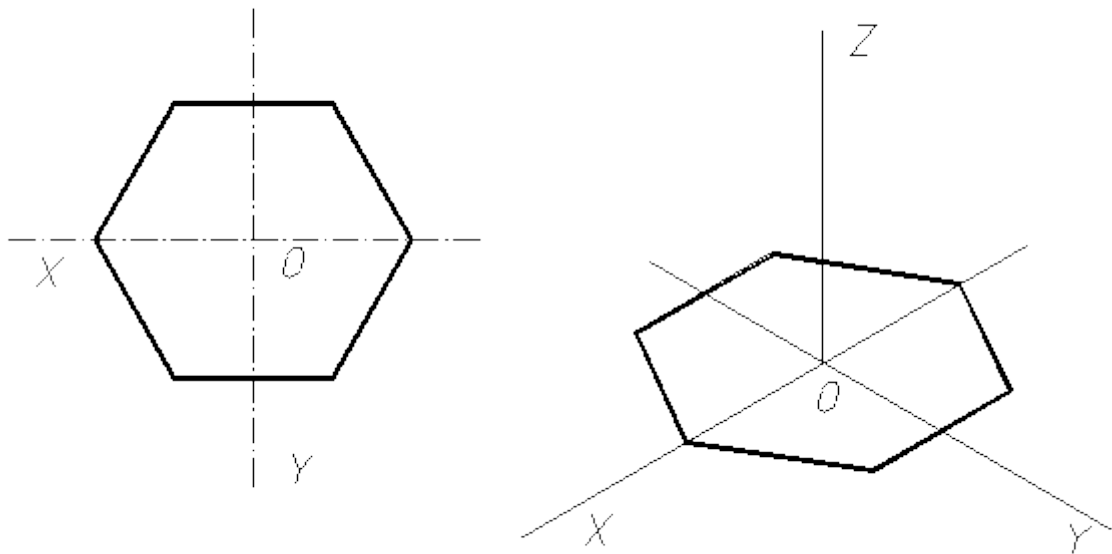


Рисунок 91

### Построение окружности в прямоугольной изометрической проекции

Наиболее сложной плоской фигурой для вычерчивания в аксонометрии является окружность. Как известно, окружность в изометрии проецируется в эллипс, но построение эллипса довольно сложно, поэтому ГОСТ 2.317-69 рекомендует вместо эллипсов применять овалы. Существует несколько способов построения изометрических овалов. Рассмотрим один из наиболее распространенных.

Размер большой оси эллипса  $1,22d$ , малой  $0,7d$ , где  $d$  - диаметр той окружности, изометрия которой строится. На рисунке 92 показан графический способ определения большой и малой осей изометрического эллипса. Для определения малой оси эллипса соединяют точки C и D. Из точек C и D, как из центров, проводят дуги радиусов, равных CD, до взаимного их пересечения. Отрезок AB - большая ось эллипса.

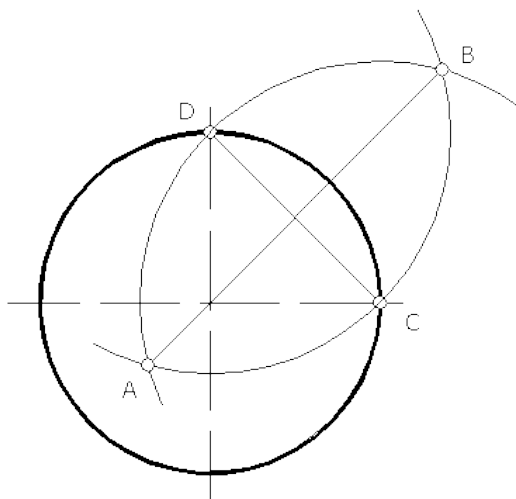


Рисунок 92

Установив направление большой и малой осей овала в зависимости от того, какой координатной плоскости принадлежит окружность, по размерам большой и малой оси проводят две concentric окружности, в пересечении которых с осями намечают точки  $O_1, O_2, O_3, O_4$ , являющиеся центрами дуг овала (рисунок 93).

Для определения точек сопряжения проводят линии центров, соединяя  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . из полученных центров  $O_1, O_2, O_3, O_4$  проводят дуги радиусами  $R$  и  $R_1$ . размеры радиусов видны на чертеже.

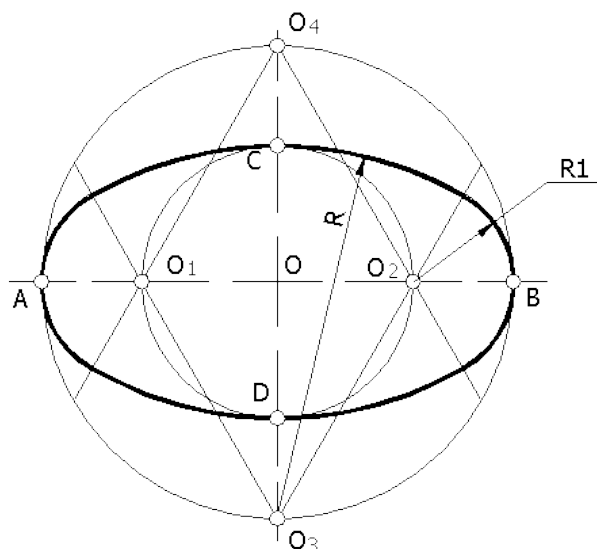


Рисунок 93

Направление осей эллипса или овала зависит от положения проецируемой окружности. Существует следующее правило: большая ось эллипса всегда перпендикулярна к той аксонометрической оси, которая на данную плоскость проецируется в точку, а малая ось совпадает с направлением этой оси (рисунок 94).

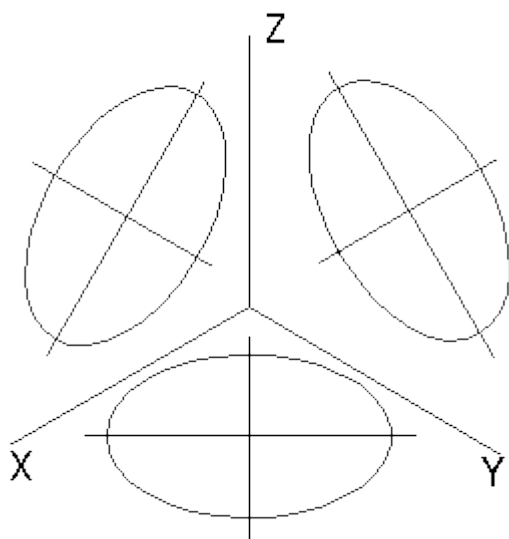


Рисунок 94

### Штриховка и изометрической проекции

Линии штриховки сечений в изометрической проекции, согласно ГОСТ 2.317-69, должны иметь направление, параллельное или только большим диагоналям квадрата, или только малым.

### 2. Прямоугольная диметрия

Прямоугольной диметрией называется аксонометрическая проекция с равными показателями искажения по двум осям  $X$  и  $Z$ , а по оси  $Y$  показатель искажения в два раза меньше.

По ГОСТ 2.317-69 применяют в прямоугольной диметрии ось  $Z$ , расположенную вертикально, ось  $X$  наклонную под углом  $7^\circ$ , а ось  $Y$  - под углом  $41^\circ$  к линии горизонта. Показатели искажения по осям  $X$  и  $Z$  равны  $0,94$ , а по оси  $Y$  -  $0,47$ . Обычно применяют приведенные коэффициенты  $k_x=k_z=1$ ,  $k_y=0,5$ , т.е. по осям  $X$  и  $Z$  или по направлениям им параллельным, откладывают действительные размеры, а по оси  $Y$  размеры уменьшают в два раза.

Для построения осей диметрии пользуются способом, указанным на рисунке 95, который заключается в следующем:

На горизонтальной прямой, проходящей через точку  $O$ , откладывают в обе стороны восемь равных произвольных отрезков. Из конечных точек этих отрезков вниз по вертикали откладывают слева один такой же отрезок, а справа - семь. Полученные точки соединяют с точкой  $O$  и получают направление аксонометрических осей  $X$  и  $Y$  в прямоугольной диметрии.

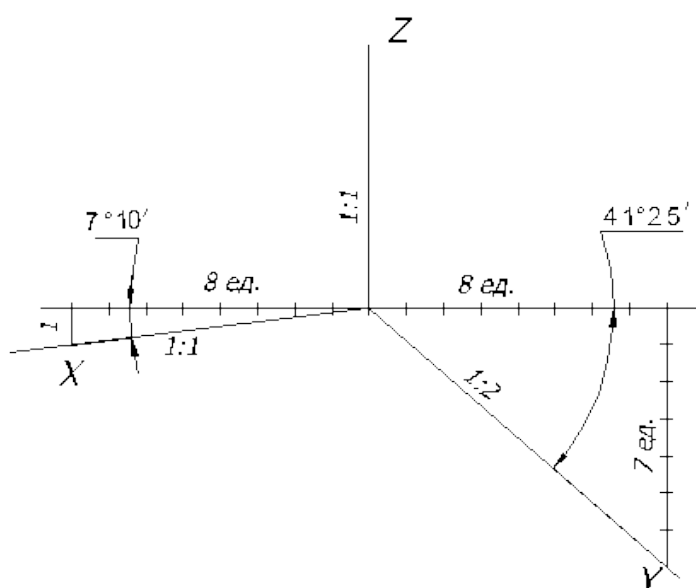


Рисунок 95

### Построение диметрической проекции шестиугольника

Рассмотрим построение в диметрии правильного шестиугольника, расположенного в плоскости  $\Pi_1$  (рисунок 96).

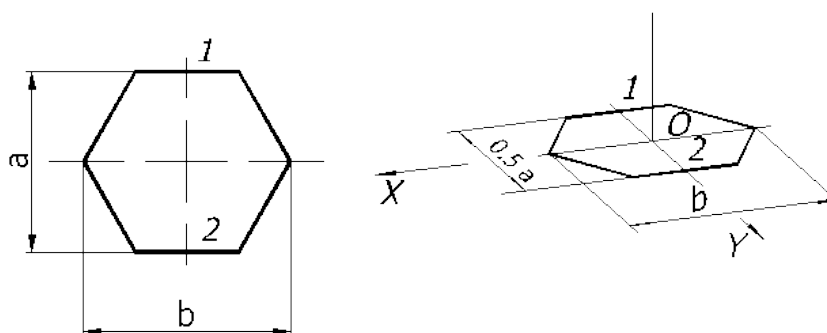


Рисунок 96

На оси  $X$  откладываем отрезок равный величине  $b$ , чтобы его середина находилась в точке  $O$ , а по оси  $Y$  - отрезок  $a$ , размер которого уменьшен вдвое. Через полученные точки  $1$  и  $2$  проводим прямые параллельно оси  $OX$ , на которых откладываем отрезки

равные стороне шестиугольника в натуральную величину с серединой в точках 1 и 2. Полученные вершины соединяем. На рисунке 97а изображен в диметрии шестиугольник, расположенный параллельно фронтальной плоскости, а на рисунке 66б - параллельно профильной плоскости проекции.

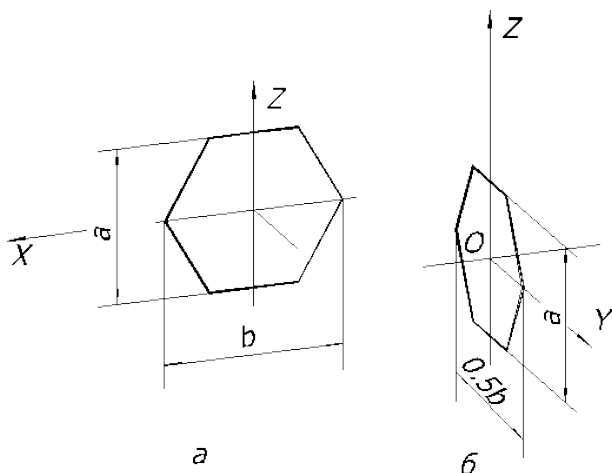


Рисунок 97

#### Построение окружности в диметрии

В прямоугольной диметрии все окружности изображаются эллипсами,

Длина большой оси для всех эллипсов одинакова и равна  $1,06d$ . Величина малой оси различна: для фронтальной плоскости равна  $0,95d$ , для горизонтальной и профильной плоскостей –  $0,35d$ .

На практике эллипс заменяется четырехцентровым овалом. Рассмотрим построение овала, заменяющего проекцию окружности, лежащей в горизонтальной и профильной плоскостях (рисунок 98).

Через точку  $O$  – начало аксонометрических осей, проводим две взаимно перпендикулярные прямые и откладываем на горизонтальной линии величину большой оси  $AB=1,06d$ , а на вертикальной линии величину малой оси  $CD=0,35d$ . Вверх и вниз от  $O$  по вертикали откладываем отрезки  $OO_1$  и  $OO_2$ , равные по величине  $1,06d$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  являются центром больших дуг овала. Для определения еще двух центров ( $O_3$  и  $O_4$ ) откладываем на горизонтальной прямой от точек  $A$  и  $B$  отрезки  $AO_3$  и  $BO_4$ , равные  $\frac{1}{4}$

величины малой оси эллипса, то есть  $\frac{0,35}{4}d$ .

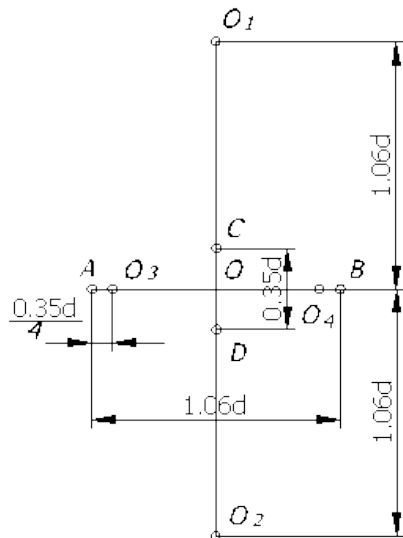


Рисунок 98

Затем, из точек  $O_1$  и  $O_2$  проводим дуги, радиус которых равен расстоянию до точек  $C$  и  $D$ , а из точек  $O_3$  и  $O_4$  – радиусом до точек  $A$  и  $B$  (рисунок 99).

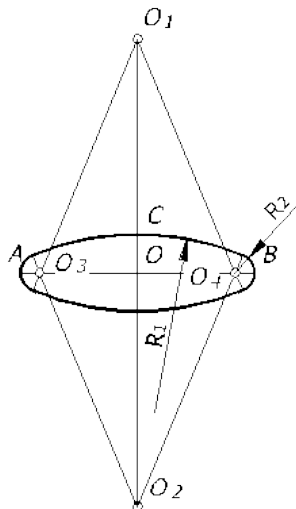


Рисунок 99

Построение овала, заменяющего эллипс, от окружности, расположенной в плоскости  $\Pi_2$ , рассмотрим на рисунке 68. Проводим оси симметрии:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Малая ось эллипса совпадает с направлением оси  $Y$ , а большая перпендикулярна к ней. На осях  $X$  и  $Z$  от начала откладываем величину радиуса окружности и получаем точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $L$ , являющиеся точками сопряжения дуг овала. Из точек  $M$  и  $N$  проводим горизонтальные прямые, которые в пересечении с осью  $Y$  и перпендикуляром к ней дают точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  – центры дуг овала (рисунок 100).

Из центров  $O_3$  и  $O_4$  описывают дугу радиусом  $R_2 = O_3 M$ , а из центров  $O_1$  и  $O_2$  – дуги радиусом  $R_1 = O_2 N$



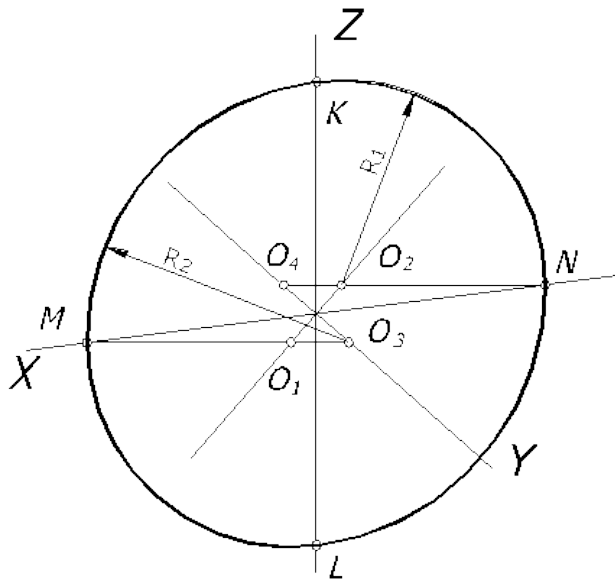


Рисунок 100

### Штриховка в прямоугольной диметрии

Линии штриховки разрезов и сечений в аксонометрических проекциях выполняются параллельно одной из диагоналей квадрата, стороны которого расположены в соответствующих плоскостях параллельно аксонометрическим осям (рисунок 101).

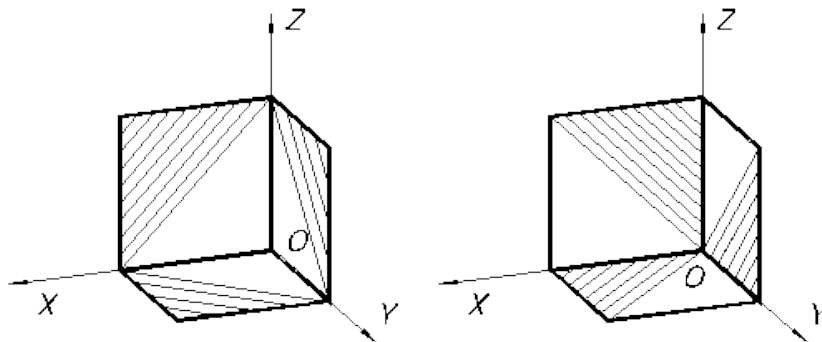


Рисунок 101

1. **Вопросы для самопроверки**
2. Какие виды аксонометрических проекций вы знаете?
3. Под каким углом расположены оси в изометрии?
4. Какую фигуру представляет изометрическая проекция окружности?
5. Как расположена большая ось эллипса для окружности, принадлежащей профильной плоскости проекций?
6. Какие приняты коэффициенты искажения по осям X, Y, Z для построения диметрической проекции?
7. Под какими углами расположены оси в диметрии?
8. Какой фигурой будет являться диметрическая проекция квадрата?
9. Как построить диметрическую проекцию окружности, расположенной во фронтальной плоскости проекций?
10. Основные правила нанесения штриховки в аксонометрических проекциях.

## Лекция 16. Построение теней в аксонометрии.

Основные правила построения теней, изложены в методе ортогонального проецирования, остаются в силе и при построении теней в аксонометрических проекциях. Направление лучей света может быть выбрано произвольно, но с соблюдением условий правдоподобности. Лучи не должны быть слишком пологими или слишком крутыми, лучшим углом наклона луча света к горизонту можно считать  $30...40^\circ$ . Так же направление лучей может быть взято параллельно диагонали куба, построенного на аксонометрических осях  $x, y, z$ . При выборе направления лучей света задается первичная и вторичная проекции луча.

В аксонометрических проекциях так же различают тени собственные и тени падающие.

**Тень от точки.** Перед построением тени от точки в аксонометрии необходимо задаться направлением светового луча  $S$  в пространстве и вторичной его проекции  $S_1$ .

Для построения тени через аксонометрическую проекцию  $T$  точки  $A$  проводим луч параллельно заданному  $S$ , а через вторичную проекцию  $A'_1$  проводим прямую, параллельную вторичной проекции луча  $S_1$ . Точка пересечения лучей будет тенью от точки  $A$  (рисунок 102).

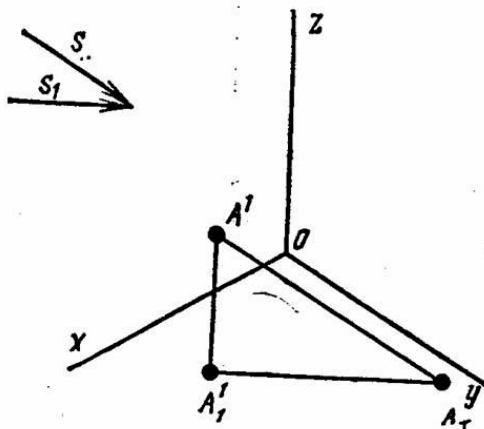


Рисунок 102

В зависимости от расположения точки в пространстве тень может падать на горизонтальную плоскость (рисунок 102) или на вертикальную (рисунок 103), фронтальную или профильную.

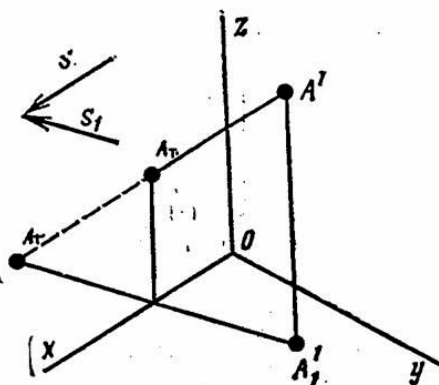


Рисунок 103

Если тень от точки  $A'$  будет падать на наклонную плоскость (рисунок 104), например на плоскость  $\alpha$ , то тень найдется в результате построения точки пересечения луча  $S$  с плоскостью  $\alpha$ .

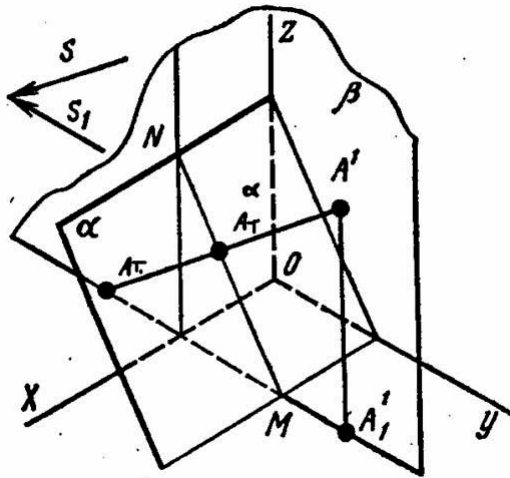


Рисунок 104

Для этого следует: заключить луч  $S$  в горизонтально – проецирующую плоскость  $\beta$  ( $S \in \beta$ );

найти линию пересечения  $MN$  плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , тогда точки пересечения луча  $S$  с линией пересечения  $MN$  даст тень от точки  $A$  на плоскость  $\alpha$ .

**Тень от отрезка прямой линии.** Рассмотрим построение тени прямой общего положения  $AB$ . Зададимся аксонометрическими осями  $X, Y, Z$ , прямой  $A'B'$  общего положения с ее вторичной проекцией  $A'_1/B'_1$ , а так же направлением светового луча  $S$  и его вторичной проекцией  $S_1$  (рисунок 105).

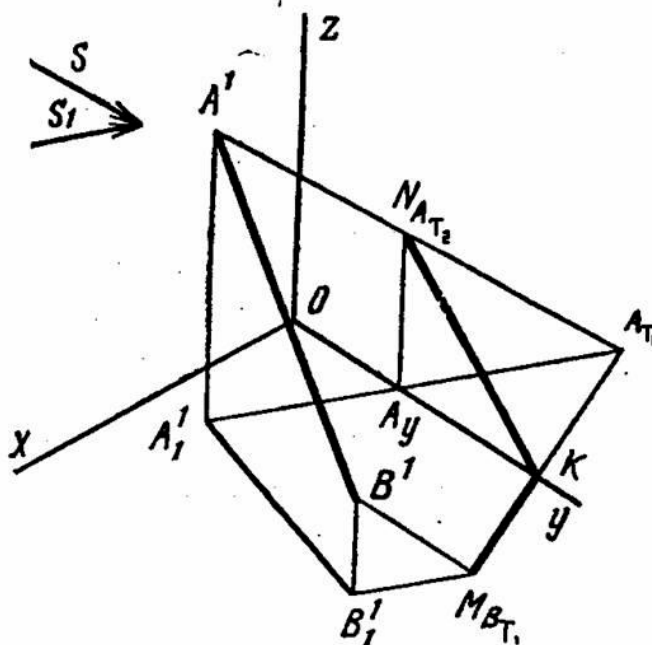


Рисунок 105

Для нахождения падающей тени проводим через отрезок прямой лучевую плоскость и находим ее след на горизонтальной или на фронтальной плоскости проекции. Для этого через точки  $A^1$  и  $B^1$  проводим лучи и находим следы (тени) этих лучей  $A_{T1}$  и

$B_{T1}$ . Из построения видно, что тень от точки В легла на горизонтальную плоскость, а тень от точки А легла за пределами вертикальной плоскости, и на пересечении с осью Y будем иметь точку перелома тени Т. Теперь найдем тень от точки А на вертикальной плоскости, для этого из точки  $A_Y$  восставим перпендикуляр до пересечения его с лучом, идущим из точки А. точка пересечения и будет тенью от точки А на профильной плоскости. Найдем точку соединяем с точкой перелома К.

В аксонометрических проекциях, так же как и в ортогональных проекциях, могут иметь место различные положения прямой в пространстве. Если прямая будет расположена ближе к горизонтальной плоскости то и тень от нее не упадет на горизонтальную плоскость, а при расположении отрезка ближе к фронтальной (вертикальной) плоскости вся тень упадет на фронтальную плоскость.

**Тени от геометрических тел.** От любого геометрического тела можно построи в той или иной аксонометрической проекции падающую тень, а на самом теле найти его собственную тень. На рисунке 106,107 построены кубы в прямоугольной изометрии и диметрии, найдены падающие тени и показаны тени собственные.

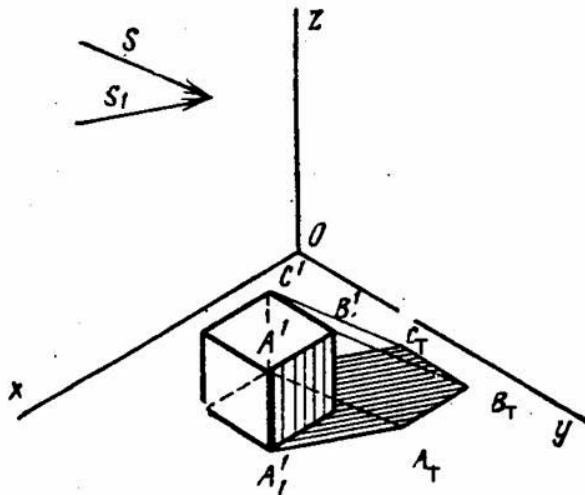


Рисунок 106

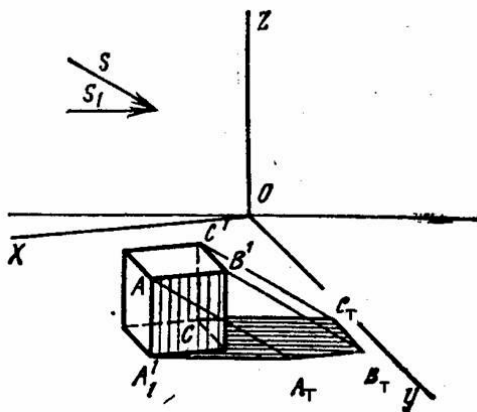


Рисунок 107

Во всех видах аксонометрических проекциях техника построения теней одинакова. Вычерчиваем предмет, задаемся направлением луча S и его вторичной проекции  $S_1$ . Через каждую точку проводим лучи S, а через проекции точек предмета – проекции лучей  $S_1$ .

Пересечение луча  $S$  с проекцией луча  $S_1$  даст тень от точки  $A$  в точке  $A_K$ . Найдя таким образом тени ряда точек, соединяем их между собой и с основанием, если предмет стоит на плоскости.

На рисунке 108 построена тень от пирамиды в четырех вариантах, т.е. освещение взято с разных сторон. Часто берут направление луча параллельно диагонали куба, как в метода ортогональных проекций. Для того чтобы построить тень от пирамиды, стоящей на горизонтальной плоскости, надо задаться направлением луча в пространстве и его проекцией на плоскости, причем направление луча можно выбрать в зависимости от желания показать в тени те или иные элементы предмета.

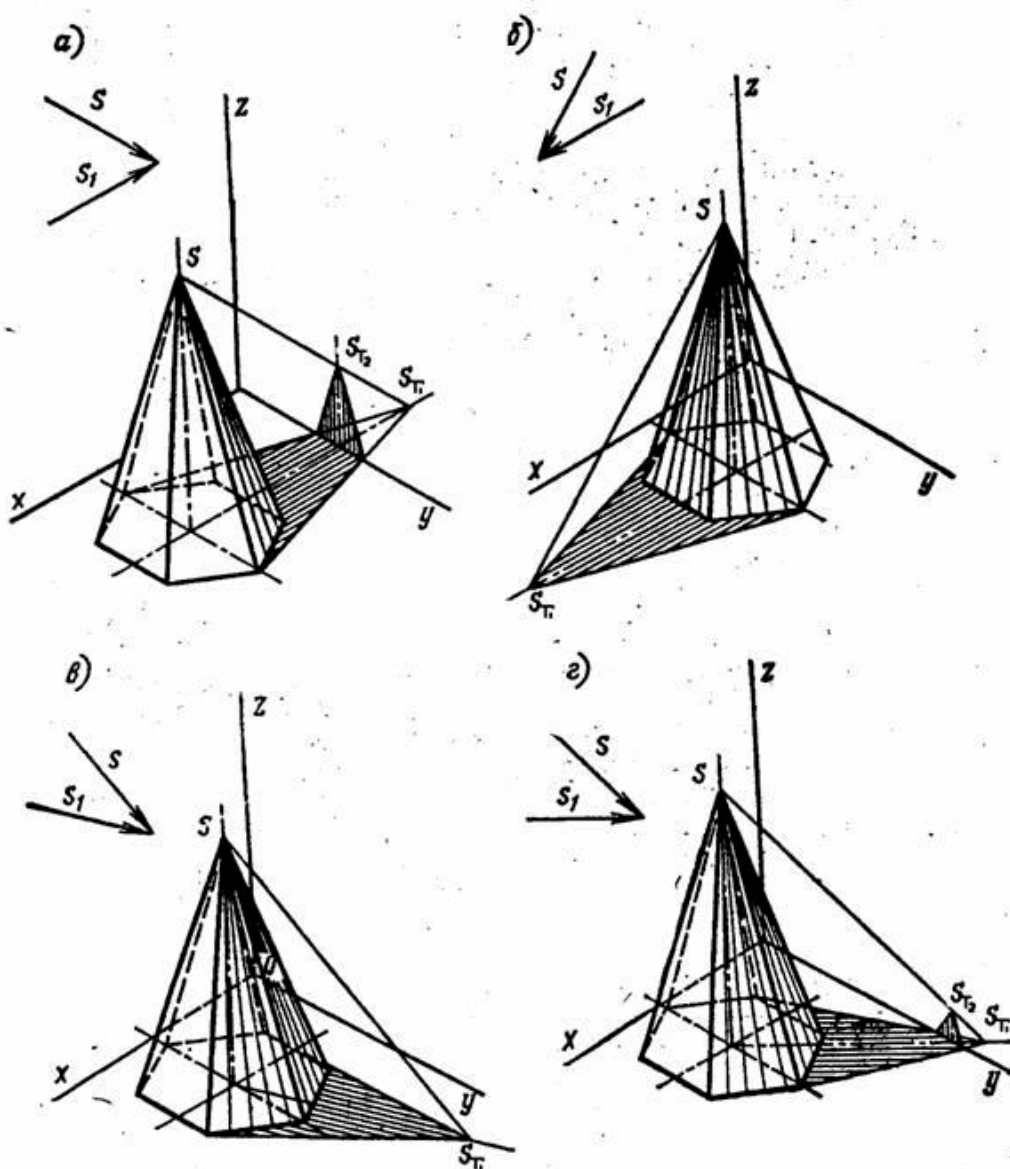


Рисунок 108

Так, на рисунке 75а тень падает слева, вторичная проекция луча параллельна оси проекции  $OX$ . На рисунке 11.41б предмет освещен сзади, вторичная проекция луча направлена в обратном направлении. На рисунке 11.41в предмет освещен с слева и сзади, а на рисунке 11.41г – слева направо.

**Примеры построения теней на строительных объектах.**

Рассмотрим подробнее построение теней отдельных элементов зданий.

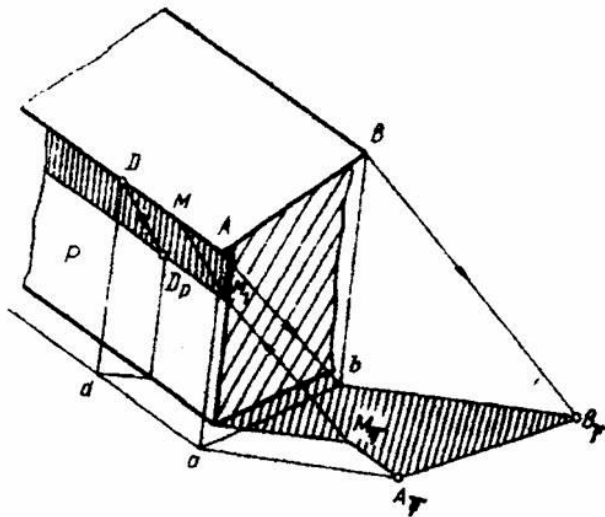


Рисунок 76

На рисунке 76 показано построение тени от карниза AD на плоскость стены P. Тень карниза пройдет через точку  $D_p$  – тень от произвольной точки D на плоскость P и будет параллельна карнизу, так как карниз параллелен плоскости P. Эту же тень можно построить способом обратного луча. С этой целью из точки  $M_T$ , в которой пересекаются тени, падающие на землю от карниза и от угла стены, проведен луч в обратном направлении до пересечения его в точке  $M_1$  с углом стены. Тень от карниза по стене пройдет через точку  $M_1$ .

На рисунке 77 показано построение тени от цоколя и угла стены.

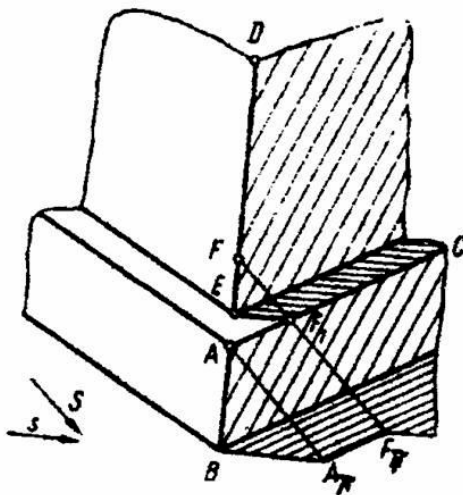


Рисунок 77

Контур собственной тени цоколя проходит через точки B, A и C, а на стене граница собственной тени – угол стены DE. Тень прямой AB совпадает с проекцией луча, тень прямой AC проходит через тень  $A_T$  параллельно AC. Тень от угла стены падает сначала на верхнюю плоскость (обрез) цоколя и параллельна проекции луча, а затем в точке  $F_1$  «соскальзывает» с цоколя на землю и дальше идет через точку  $F_T$  по земле параллельно проекции луча.

На рисунке 78 изображена дверная ниша.

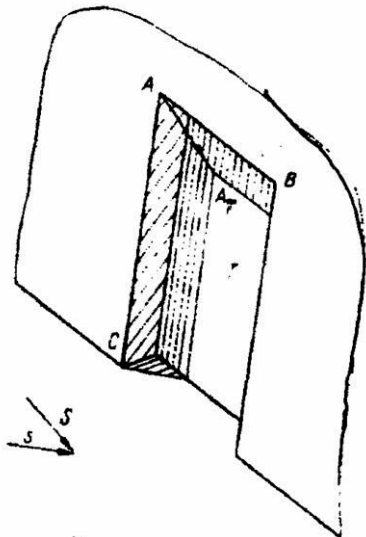


Рисунок 78

Тени будут отбрасывать прямые АВ и АС. Эти тени будут параллельны указанным прямым и проходят через точку  $A_T$  – тень от точки А, падающую на плоскость ниши Т.

Контур собственной тени пристройки к стене, изображенной на рисунке 79 проходит через точки L, К и F.

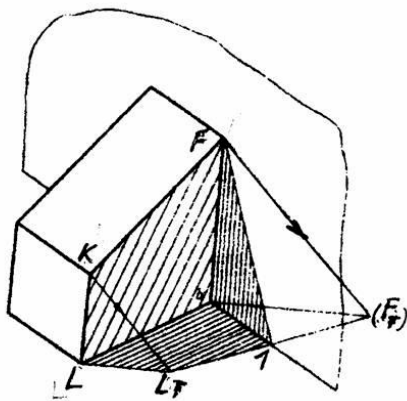


Рисунок 79

Тень от прямой LK совпадает с проекцией луча. Тень от прямой KF по горизонтальной плоскости Н пойдет через точку  $K_T$  и мнимую тень от точки F на Н –  $F_T$ . В действительности, тень от точки F совпадает с этой точкой, и, дойдя до стены, тень в точке 1 изломится и по стене пойдет в точку F, в которой прямая KF пересекает стену.

К торцевой стене здания (рисунок 80) примыкает пристройка призматической формы, контур собственной тени которой проходит через точки С, А и В.

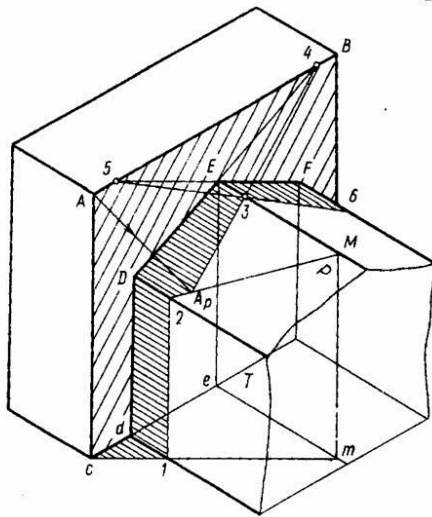


Рисунок 80

Рассмотрим построение тени пристройки, падающей на здание. Тень прямой  $CA$  на участке  $C1$  совпадает с проекцией луча света, на участке  $1 - 2$  параллельна  $CA$ , так как указанная прямая параллельна стене. Тень от точки  $A$  падает на передний скат крыши, эта тень  $A_p$  расположена на прямой  $2M$ , по которой пересекает крышу вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость, проведенная через луч света, проходящий через точку  $A$ . Тень от прямой  $AB$  на передний скат крыши проходит через точку  $A_p$  и точку  $4$ , в которой прямая  $AB$  пересекла бы плоскость  $P$ , если ее продлить вправо вверх. Дойдя до конька крыши, в точке  $3$  тень изломится и пройдет по заднему скату крыши в точку  $6$ . прямая  $3 - 6$  есть продолжение прямой  $5 - 3$ . В точке  $5$  прямая  $AB$  пересекла бы скат крыши, если его продлить влево вверх (тень от прямой на плоскость проходит через точку пересечения прямой с плоскостью).